BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FOURET

Sur le nombre des normales communes à deux courbes, à deux surfaces, à une courbe et à une surface

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 43-49
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__43_1>

Sur le nombre des normales communes à deux courbes, à deux surfaces, à une courbe et à une surface; par M. G. Fouret.

(Séances des 24 janvier et 13 juin 1877.)

§ I. — Normales communes a deux courbes planes algébriques.

1. Considérons sur un même plan deux courbes planes algébriques (m, n) et (m', n'), la première d'ordre m et de classe n, la seconde d'ordre m' et de classe n'. Supposons-les indépendantes l'une de l'autre; supposons en outre qu'aucune d'elles ne passe par les *ombilics* (¹) et ne soit tangente à la droite de l'infini. Sous ces restrictions, on a le théorème suivant :

Théorème. — *Le nombre des normales communes à deux courbes algébriques situées dans un même plan, dont les ordres sont respectivement m et m', les classes n et n', est égal à* $mn' + m'n + nn'$.

Ce théorème n'est pas nouveau : M. Chasles, dans ces dernières années, en a donné une démonstration fort simple, fondée sur le principe de correspondance (²). Le principal intérêt de la nouvelle démonstration que nous allons en donner est de conduire à la solution de la question analogue pour les surfaces. Voici cette démonstration :

2. Imaginons l'ensemble des courbes *parallèles* à la courbe (m, n) : il est bien clair que les points de contact de ces courbes avec la courbe (m', n') sont précisément les pieds, sur cette dernière courbe, des normales communes cherchées, et réciproquement. Or les courbes parallèles à (m, n) forment un *système*, dont les carac-

---

(¹) Points imaginaires à l'infini communs à tous les cercles du plan.

(²) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXVI, p. 126.

téristiques, μ et ν, sont faciles à déterminer. En effet, le nombre μ de ces courbes qui passent par un point quelconque est égal au nombre des normales à (m, n) issues de ce dernier point; on a par conséquent $\mu = m + n$. En second lieu, le nombre ν des mêmes courbes qui sont tangentes à une droite quelconque est, comme on le voit aisément, égal au nombre des tangentes à (m, n) parallèles à la droite en question, d'où l'on conclut $\nu = n$. On sait, d'autre part, que le nombre des contacts des branches d'un système (μ, ν) avec une courbe algébrique d'ordre m' et de classe n' est égal à $n'\mu + m'\nu$ (¹). En substituant dans cette dernière expression à μ et à ν leur valeur, on obtient, pour le nombre des normales communes cherchées, $mn' + m'n + nn'$.

§ II. — Normales communes a deux surfaces algébriques.

3. Rappelons d'abord un théorème relatif aux *systèmes* de surfaces sur lequel nous allons nous appuyer. En désignant par μ, ν, ρ les caractéristiques d'un pareil système, c'est-à-dire les nombres des surfaces qui le composent, passant par un point quelconque, touchant un plan quelconque et tangentes à une droite quelconque, on a le théorème suivant :

Le nombre des points de contact des surfaces d'un système (μ, ν, ρ) avec une surface algébrique d'ordre m, de classe n et de rang r, indépendante du système, est égal à $n\mu + m\nu + r\rho$ (²).

De ce théorème on tire immédiatement deux conséquences qui vont nous être utiles.

4. Considérons une surface algébrique (m, n, r) ne touchant pas le plan de l'infini et ne contenant pas l'*ombilicale* (³), et cherchons le nombre des normales à cette surface issues d'un point quelconque. Ce nombre n'est autre que le nombre des sphères, ayant pour centre commun ce dernier point, qui touchent la surface

(¹) Voir *Bulletin de la Société*, t. V, p. 21.

(²) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXX, p. 170. *Voir* la démonstration de ce théorème donnée par M. Brill dans le tome VIII des *Mathematischen Annalen* (1875).

(³) Conique imaginaire à l'infini, commune à toutes les sphères.

(m, n, r). Or ces sphères forment un système indépendant de la surface, et les caractéristiques de ce système se voient immédiatement; on a $\mu = \nu = \rho = 1$. Le théorème que nous avons rappelé plus haut (3) peut donc s'appliquer, et l'on en conclut que :

Le nombre des normales menées d'un même point à une surface algébrique (m, n, r), ne présentant à l'infini aucune particularité, est $m + n + r$.

5. On peut trouver de la même manière le nombre des normales communes à la surface (m, n, r) et à une droite quelconque D. Pour cela, considérons l'ensemble des cylindres de révolution qui ont pour axe commun cette droite : ces cylindres forment un système dont on obtient immédiatement les caractéristiques; on a $\mu = \rho = 1$, $\nu = 0$. Le nombre des points de contact de ces cylindres avec la surface (m, n, r) est précisément égal au nombre des normales communes à cette surface et à la droite D. Or ce nombre, donné par le théorème déjà invoqué (3), est égale à $n + r$. Par suite :

Le nombre des normales communes à une droite quelconque et à une surface (m, n, r), ne présentant à l'infini aucune particularité, est égal à $n + r$.

6. Nous sommes maintenant à même de déterminer le nombre des normales communes à deux surfaces algébriques (m, n, r), (m', n', r'), indépendantes l'une de l'autre, et ne présentant aucune particularité à l'infini, c'est-à-dire ne passant pas par l'ombilicale et ne touchant pas le plan de l'infini.

Théorème. — *Le nombre des normales communes à deux surfaces algébriques, dont les ordres sont respectivement m et m', les classes n et n', les rangs r et r', est $mn' + m'n + (n + r)(n' + r')$.*

En effet, considérons l'ensemble des surfaces parallèles à la surface (m, n, r). Ces surfaces forment un système, dont les caractéristiques μ, ν, ρ, s'obtiennent aisément. Il est clair que le nombre des surfaces du système passant par un point quelconque est égal au nombre des normales abaissées de ce point sur (m, n, r); d'où $\mu = m + n + r$, comme nous l'avons vu plus haut (4). Le nombre des surfaces du système tangentes à un plan quelconque est évidemment égal au nombre des plans tangents à (m, n, r) menés parallèlement au plan en question; d'où $\nu = n$. Enfin le nombre des surfaces du système tangentes à une droite quelconque est égal au nombre des normales communes à cette droite et à (m, n, r), c'est-à-dire, comme nous l'avons vu (5), que l'on a $\rho = n + r$. Le système ainsi défini étant indépendant de la surface (m', n', r'), le nombre des points de contact des surfaces qui le composent avec la surface (m', n', r') est donné par le théorème fondamental énoncé ci-dessus (3). Mais ces points de contact sont précisément les pieds sur la surface (m', n', r') des normales communes à cette dernière surface et à la surface (m, n, r). Ce dernier nombre est par suite égal à

$$\begin{aligned} n\mu + m\nu + r\rho &= n(m' + n' + r') + mn' + r(n' + r') \\ &= mn' + m'n + (n + r)(n' + r'). \end{aligned}$$

§ III. — Normales communes a deux courbes algébriques, planes ou gauches, situées d'une manière quelconque dans l'espace.

7. La solution de cette question repose sur un théorème fondamental, relatif à un système de surfaces et à une courbe quelconque, plane ou gauche, que nous rappellerons d'abord :

Le nombre des points de contact des surfaces d'un système (μ, ν, ρ) avec une courbe algébrique, plane ou gauche, d'ordre p et de classe q, indépendante du système, est égal à $q\mu + p\rho$ (¹).

Nous allons déduire, comme corollaires de ce théorème, deux autres théorèmes qui nous seront utiles.

8. Considérons une courbe algébrique, plane ou gauche, d'ordre p et de classe q, n'ayant aucun contact avec le plan de l'infini et ne rencontrant pas l'ombilicale. Considérons, d'autre

---

(¹) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXX, p. 170. *Voir*, pour la démonstration, le Mémoire déjà cité de M. Brill. Nous entendons ici par *classe de la courbe* le nombre des tangentes de cette courbe qui rencontrent une droite quelconque.

part, un système de sphères ayant pour centre commun un point o quelconque. Ces sphères, comme nous l'avons déjà remarqué (4), forment un système ($\mu = \nu = \rho = 1$), et, comme elles sont indépendantes de la courbe (p, q), le nombre de leurs points de contact avec cette dernière courbe est fourni par le théorème que nous avons rappelé (7). D'ailleurs le nombre en question n'est autre que le nombre des normales abaissées du point o sur la courbe (p, q); par suite :

Le nombre des normales abaissées d'un point fixe sur une courbe gauche d'ordre p et de classe q est égal à $p + q$.

9. Prenons maintenant une droite quelconque D, et considérons l'ensemble des cylindres de révolution ayant pour axe commun cette droite. L'ensemble de ces cylindres forme un système, dont les caractéristiques déjà trouvées (5) sont $\mu = 1$, $\nu = 0$, $\rho = 1$. Les points de contact de ces cylindres avec la courbe (p, q) sont en même temps les pieds, sur cette courbe, des normales communes à (p, q) et à D. Le nombre de ces normales communes est par suite donné par le théorème du n° 7; d'où l'on conclut que :

Le nombre des normales communes à une droite D *et à une courbe (p, q) est égal à $p + q$.*

10. Cherchons maintenant le nombre des normales communes à deux courbes (p, q), (p', q'), indépendantes l'une de l'autre, ne touchant pas le plan de l'infini, et ne rencontrant pas l'ombilicale. Ce nombre est donné par le théorème suivant :

Théorème. — *Le nombre des normales communes à deux courbes algébriques, planes ou gauches, dont les ordres sont respectivement p et p', et les classes q et q', est égal à $(p + q)(p' + q')$.*

Pour démontrer ce théorème, considérons la surface formée en portant une même longueur sur toutes les normales à la courbe (p, q), à partir de leur pied. En faisant varier cette longueur, on obtient une infinité de surfaces analogues à la précédente [1], et dont l'ensemble forme un *système*. Les caractéristiques de ce système se

[1] Ces surfaces constituent ce qu'on a l'habitude d'appeler des surfaces *canaux*.

déterminent aisément : le nombre μ des surfaces du système qui passent par un point quelconque est égal au nombre des normales menées de ce point à (p, q), c'est-à-dire à $p + q$ (8). Le nombre ρ des surfaces du système qui touchent une droite quelconque est égal au nombre des normales communes à cette droite et à (p, q): c'est encore $p + q$ (9) ([1]). En observant que les points de contact des surfaces considérées avec (p', q') sont précisément les pieds, sur cette courbe, des normales communes à cette courbe et à la courbe (p, q), on n'a plus qu'à appliquer le théorème du n° 7, et l'on trouve que le nombre des normales communes cherchées est $q\mu + p\rho = (p' + q')q + (p' + q')p = (p + q)(p' + q')$.

11. *Remarque.* — Quand les deux courbes (p, q), (p', q') sont planes et situées dans un même plan, le nombre précédent se décompose en deux parties : l'une $pq' + p'q + qq'$ exprime le nombre des normales communes situées dans le plan commun (1); l'autre pp' est le nombre des points d'intersection des deux courbes. Ce dernier résultat s'explique du reste parfaitement, car la perpendiculaire au plan de la figure, en l'un quelconque des pp' points d'intersection des deux courbes, est une normale commune à ces deux courbes.

§ IV. — Normales communes a une courbe algébrique et a une surface algébrique.

12. Considérons maintenant une surface (m, n, r) et une courbe (p, q) plane ou gauche, cette surface et cette courbe étant d'ailleurs indépendantes l'une de l'autre, et ne présentant aucune particularité par rapport au plan de l'infini. On a alors le théorème suivant :

Théorème. — *Le nombre des normales communes à une surface (m, n, r) et à une courbe (p, q), plane ou gauche, indépendante de la surface, est égal à $mq + (n + r)(p + q)$.*

([1]) La troisième caractéristique r, dont nous aurons besoin plus loin, et qui exprime le nombre des surfaces du système tangentes à un plan quelconque, est égale à q ; car elle est égale, conme il est facile de le voir, au nombre des plans tangents à la courbe (p, q) parallèles au plan en question.

Nous pouvons démontrer ce théorème de deux manières : le nombre cherché est en effet égal, d'une part, au nombre des points de contact avec (p, q) des surfaces parallèles à (m, n, r), de l'autre, au nombre des points de contact avec (m, n, r) des surfaces canaux ayant pour axe commun la courbe (p, q). En suivant la première voie, le système des surfaces parallèles à (m, n, r) ayant pour caractéristiques : $\mu = m + n + r$, $\rho = n + r$, le nombre des contacts de ces surfaces avec (p, q) est (7) égal à

$$(m + n + r)\, q + (n + r)\, p = mq + (n + r)(p + q).$$

Par la seconde manière, on a, pour le système des surfaces canaux de (p, q), $\mu = p + q$, $\nu = q$, $\rho = p + q$; le nombre des points de contact de ces surfaces avec (m, n, r) est (3)

$$n\,(p + q) + mq + r\,(p + q) = mq + (n + r)(p + q),$$

nombre déjà trouvé par la première méthode.

Remarque. — Nous sommes loin d'avoir épuisé les questions que soulève la recherche des normales communes ; mais il nous faut avouer qu'en dehors du cas de deux courbes planes situées dans un même plan, le problème devient beaucoup plus compliqué, lorsque les courbes ou surfaces que l'on considère touchent le plan de l'infini, que l'ombilicale est contenue sur les surfaces ou rencontre les courbes.