BULLETIN DE LA S. M. F.

F. LINDEMANN

Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires (deuxième note)

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 195-208

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__195_0>

Sur une représentation géométrique des covariants des formes binaires (deuxième Note); par M. Lindemann.

(Séance du 10 avril 1878.)

Dans une Communication antérieure (t. V du *Bulletin*, p. 113), j'ai expliqué une méthode qui permet de profiter des résultats de la théorie des formes algébriques ternaires d'ordre n pour la théorie des formes binaires d'ordre $2n$, et réciproquement. Elle était fondée sur ce théorème qu'il y a une courbe d'ordre n, qui est particulièrement attachée à une forme binaire, représentée par $2n$ points arbitraires d'une conique fixe, de façon que les polaires binaires d'ordre 2ρ par rapport aux $2n$ points se trouvent déterminées par les intersections de la conique avec les polaires ternaires d'ordre ρ par rapport à la courbe en question ([1]). Cette dernière passe par les $2n$ points donnés, et toutes ses polaires quadratiques sont harmoniquement circonscrites à la conique fixe; c'est-à-dire, la relation $(\alpha p p')^2 \alpha_x^{n-2} = 0$ est satisfaite par tous les points x du plan, si $\alpha_x^n = 0$ et $p_x^2 = p_x'^2 = 0$ sont respectivement l'équation de la courbe d'ordre n et celle de la conique. En vertu de cette propriété, la courbe $\alpha_x^n = 0$ n'est pas générale, si $n > 3$; elle est particularisée parce qu'un certain covariant, dont j'ai donné l'expression, s'annule identiquement.

Pour compléter les recherches de la Note précitée, on peut demander de trouver l'équation de cette courbe $\alpha_x^n = 0$ qui jouit des propriétés mentionnées et qui passe par les intersections de $p_x^2 = 0$ avec une courbe générale donnée par l'équation $a_x^n = 0$. C'est cette question que nous allons traiter; la solution donnera lieu à quelques applications, se rapportant aux conditions de contact d'une conique avec une courbe algébrique quelconque.

2. D'abord il nous faut démontrer un théorème auxiliaire que voici :

([1]) M. Salmon a aussi indiqué qu'il doit exister une courbe particulièrement liée à une forme binaire d'ordre pair, quand on représente les valeurs de la variable binaire par les points d'une conique (*Lessons introductory to the modern higher Algebra*; third edition, art. 190).

Chaque covariant simultané d'une conique

$$p_x^2 = p_x'^2 = p_x''^2 = \ldots = 0$$

et d'une courbe d'ordre $n(a_x^n = 0)$, *qui est du premier degré par rapport aux coefficients de cette courbe, doit être une fonction entière de diverses expressions, dont le type général est donné par la forme*

$$(ap'p'')^2 (ap'''p^{\text{IV}})^2 \ldots (ap^{(2r-1)} p^{(2r)})^2 a_x^{n-2r},$$

r *étant un nombre entier positif.*

Cette proposition est une conséquence immédiate du théorème connu [1], que chaque covariant simultané d'une conique $p_x^2 = 0$ et d'une droite $u_x = 0$ est une fonction entière des quatre formes

$$u_x, \quad p_x^2, \quad (pp'u)^2, \quad (pp'p'')^2.$$

En effet, les covariants simultanés de p_x^2 et de a_x^n qui sont du premier degré par rapport aux coefficients de a_x^n, c'est-à-dire qui ne contiennent qu'un seul symbole a, ne peuvent être changés essentiellement, quand on remplace les symboles a_i de a_x^n par les coefficients u_i d'une forme linéaire, coordonnées d'une droite; et réciproquement, chaque contrevariant (ou connexe covariant, *Zwischenform*) de p_x^2 qui est du $n^{\text{ième}}$ degré par rapport aux coordonnées u_i se transforme, par la substitution $u_i = a_i$, en un invariant (ou covariant) simultané de a_x^n et p_x^2.

3. Maintenant je me propose *d'établir l'équation de la courbe d'ordre n qui appartient au système linéaire proposé*

$$\alpha_x^n = \Pi a_x^n + \pi_x^{n-2} p_x^2 = 0$$

(*où* Π *est un facteur constant et* π_x^{n-2} *désigne une forme d'ordre* $n-2$ *à déterminer*) *et qui jouit des propriétés demandées au* n° 1.

La condition $(\alpha pp')^2 \alpha_x^{n-2} = 0$ nous donne la relation

$$(1) \quad \begin{cases} n(n-1)(app')^2 a_x^{n-2} \Pi + (n-2)(n-3)(\pi pp')^2 \pi_x^{n-4} p_x''^2 \\ \qquad + 2\pi_x^{n-2}(pp'p'')^2 + 2(n-2)(\pi p'p'')\pi_x^{n-3}(pp'p'')p_x = 0, \end{cases}$$

---

[1] Voir CLEBSCH, *Leçons de Géométrie*, t. I, p. 287.

laquelle, étant satisfaite pour toutes les valeurs de x_1, x_2, x_3, est équivalente à un système de $\frac{1}{2}n(n-1)$ équations linéaires et homogènes par rapport au facteur Π et aux $\frac{1}{2}n(n-1)$ coefficients de π_x^{n-2}. Au lieu de les résoudre par une voie directe, nous faisons remarquer qu'elles sont de forme invariante et que, par conséquent, la forme cherchée, α_x^n, doit être covariant simultané des deux formes proposées a_x^n et p_x^2. Ce covariant se détermine par le raisonnement suivant.

Les coefficients de a_x^n ne se trouvent pas multipliés, dans l'équation (1), par ceux de π_x^{n-2}. Il faut donc que α_x^n soit linéaire par rapport aux coefficients de a_x^n. D'après le théorème démontré au numéro précédent, nous connaissons tous les covariants doués de cette propriété. En désignant par r_i des facteurs numériques, nous pouvons donc poser, pour $n = 2\nu$,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_x^n = a_x^n \Delta^\nu &+ r_1 a_x^{n-2} (app')^2 \mathrm{F} \Delta^{\nu-1} \\ &+ r_2 a_x^{n-4} (app')^2 (ap''p''')^2 \mathrm{F}^2 \Delta^{\nu-2} + \ldots \\ &+ r_\nu (ap'p'')^2 (ap'''p^{\mathrm{IV}})^2 \ldots (ap^{(n-1)}p^{(n)})^2 \mathrm{F}^\nu, \end{aligned} \right.$$

où

$$\Delta = (pp'p'')^2, \quad \mathrm{F} = p_x^2,$$

et, pour $n = 2\nu + 1$:

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha_x^n = a_x^n \Delta^\nu &+ \rho_1 a_x^{n-2} (app')^2 \mathrm{F} \Delta^{\nu-1} + \ldots, \\ &+ \rho_\nu a_x (ap'p'')^2 (ap'''p^{\mathrm{IV}})^2 \ldots (ap^{(n-2)}p^{(n-1)})^2 \mathrm{F}^\nu. \end{aligned} \right.$$

4. Il est aisé de calculer les nombres r_i et ρ_i qu'il nous reste encore à déterminer. Formons le covariant $(\alpha pp')^2 \alpha_x^{n-2}$ qui doit s'évanouir. En prenant d'abord $n = 2\nu$, on déduit de (2)

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} & n(n-1)\,(\alpha pp')^2 \alpha_x^{n-2} \\ & \quad = n(n-1)\,\Delta^\nu\,(app')^2 a_x^{n-2} \\ & \qquad + r_1 \Delta^{\nu-1} [(n-2)(n-3)\,(ap'p'')^2\,(ap'''p^{\mathrm{IV}})^2\, a_x^{n-4}\,\mathrm{F} \\ & \qquad\qquad + 4(n-2)\,(ap'p'')^2 (ap'''p^{\mathrm{IV}})\, a_x^{n-3}\,(pp'''p^{\mathrm{IV}})\, p_x \\ & \qquad\qquad\qquad + 2\,(ap'p'')\, a_x^{n-2}\,\Delta] + \ldots \end{aligned} \right.$$

Supposons les termes du deuxième membre ordonnés suivant les puissances du déterminant Δ; alors nous pouvons calculer les nombres r_i de telle manière que chaque expression qui multiplie une certaine puissance de Δ s'évanouit identiquement. En effet, dans le deuxième terme du crochet qui multiplie r_1 par exemple, nous permutons les lettres $pp'''p^{\text{iv}}$ et nous formons la somme des trois expressions ainsi obtenues, laquelle contient les facteurs symboliques

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &(ap'''p^{\text{iv}})(pp'''p^{\text{iv}})p_x \\ &= \frac{1}{3}(pp'''p^{\text{iv}})[(app^{\text{iv}})p_x - (app^{\text{iv}})p'''_x + (app''')p^{\text{iv}}_x] \\ &= \frac{1}{3}(pp'''p^{\text{iv}})^2 a_x = \frac{1}{3}\Delta a_x. \end{aligned}\right.$$

Le coefficient de $r_1\,\Delta^{\nu-1}$ devient donc égal à

$$(n-2)(n-3)(ap'p'')^2(ap'''p^{\text{iv}})^2 a_x^{n-4}\,\mathrm{F} + \frac{2}{3}(2n-1)(ap'p'')^2 a_x^{n-2}\,\Delta;$$

par conséquent, le facteur de Δ^ν, au second membre de (1), est donné par

$$(ap'p'')^2 a_x^{n-2}\left[n(n-1) + \frac{2}{3}r_1(2n-1)\right];$$

et, pour le faire s'évanouir, il suffit de poser

$$r_1 = -\frac{3}{2}\,\frac{n(n-1)}{2n-1}.$$

5. Après avoir déterminé r_1, on peut trouver les autres nombres r_i par voie récurrente. Le terme général du second membre de (4) se trouve représenté par

$$\begin{aligned} &r_i\Delta^{\nu-i}\,\mathrm{F}^{i-2}(ap'p'')^2(ap'''p^{\text{iv}})^2\ldots(ap^{(2i-1)}p^{(2i)})^2 a_x^{n-2i-2} \\ &\quad\times[(n-2i)(n-2i-1)(ap^{(2i+1)}p^{(2i+2)})^2\,\mathrm{F}^2 \\ &\qquad + 4i(n-2i)(ap^{(2i+1)}p^{(2i+2)})a_x\mathrm{F}(pp^{(2i+1)}p^{(2i+2)})p_x \\ &\qquad + 4i(i-1)a_x^2(pp^{(2i+1)}p^{(2i+2)})(p'p^{(2i+1)}p^{(2i+2)})p_x p'_x + 2i\,a_x^2\,\mathrm{F}\Delta]. \end{aligned}$$

Pour transformer le second terme de l'expression entre crochets, faisons usage de l'identité (5), en y mettant $p^{(2i+1)}$, $p^{(2i+2)}$ à la place de p''', p^{iv}; elle nous donne alors

$$(pp^{(2i+1)}p^{(2i+2)})(ap^{(2i+1)}p^{(2i+2)})p_x = \frac{1}{3}\Delta a_x.$$

Par un procédé analogue, on a, dans le troisième terme,

$$(pp^{(2i+1)}p^{(2i+2)})(p'p^{(2i+1)}p^{(2i+2)})p_x p'_x = \frac{1}{3}(p'p^{(2i+1)}p^{(2i+2)})^2 p_x^2 = \frac{1}{3}\Delta F.$$

En posant, pour abréger,

$$(6)\qquad A_i = (ap'p'')^2(ap'''p^{\mathrm{IV}})^2\ldots(ap^{(2i-1)}p^{(2i)})^2 a_x^{n-2i},$$

le terme général dont il s'agit devient donc

$$r_i\Delta^{\nu-i}F^{i-1}\left[(n-2i)(n-2i-1)A_{i+1}F + \frac{2}{3}i(2n-2i+1)\Delta A_i\right].$$

De même, le terme précédent est égal à

$$r_{i-1}\Delta^{\nu-i+1}F^{i-2}\Big[(n-2i+2)(n-2i+1)A_iF \\ + \frac{2}{3}(i-1)(2n-2i+3)\Delta A_{i-1}\Big];$$

et il n'y a pas d'autres termes, dans le second membre de (4), qui contiennent le facteur $\Delta^{\nu-i+1}$, que ceux qui résultent de ces deux expressions. Voici donc l'expression qui y multiplie $\Delta^{\nu-i+1}$:

$$F^{i-1}A_i\left[r_{i-1}(n-2i+2)(n-2i+1) + \frac{2}{3}r_i i(2n-2i+1)\right];$$

par conséquent, le covariant $(\alpha pp')^2\alpha_x^{n-2}$ s'évanouit identiquement, quand on suppose les nombres r_i calculés par la formule récurrente

$$r_i = -\frac{3}{2}\frac{(n-2i+2)(n-2i+1)}{i(2n-2i+1)}r_{i-1}.$$

Or, la valeur de r_1 étant trouvée au n° **4**, on en tire, sans difficulté, la formule directe

$$r_i = \left(-\frac{2}{3}\right)^i \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2i+1)}{1.2\ldots i.(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2i+1)}.$$

Enfin on obtient, en se servant des notations introduites par (6), *pour* $n=2\nu$,

$$(7)\qquad \begin{cases} \alpha_x^n = a_x^n\Delta^\nu - \dfrac{3}{2}\dfrac{n(n-1)}{2n-1}A_1F\Delta^{\nu-1} \\ \quad + \left(\dfrac{3}{2}\right)^2\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2(2n-1)(2n-3)}A_2F^2\Delta^{\nu-2}+\ldots \\ \quad + \left(-\dfrac{3}{2}\right)^\nu \dfrac{2\nu(2\nu-1)\ldots(\nu+1)}{\nu!(4\nu-1)(4\nu-3)\ldots(2\nu+1)}A_\nu F^\nu. \end{cases}$$

6. On voit immédiatement que les mêmes raisonnements et les mêmes calculs s'appliquent encore au cas où n est impair, de sorte que l'on a $r_i = \rho_i$. Ce n'est, en effet, que le dernier terme du second membre de (7) qui doit être modifié. *On obtient, en vertu de* (3), *pour* $n = 2\nu + 1$

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \alpha_x^n &= a_x^n\,\Delta^\nu - \frac{3}{2}\,\frac{n(n-1)}{2n-1}\,A_1\,F\,\Delta^{\nu-1} + \ldots \\ &\quad + \left(-\frac{3}{2}\right)^\nu \frac{(2\nu+1)2\nu(2\nu-1)\ldots(\nu+1)}{\nu!(4\nu+1)(4\nu-1)\ldots(2\nu+3)}\,A_\nu F^\nu. \end{aligned}\right.$$

Les équations (7) *et* (8) *impliquent la solution du système d'équations linéaires, représenté par* (1).

7. Cette solution ne peut devenir indéterminée ([1]). En effet, supposons qu'il y ait une autre courbe $\beta_x^n = 0$, qui jouisse des mêmes propriétés que $\alpha_x^n = 0$. Alors ces deux courbes auraient les mêmes intersections avec la conique $F = 0$, et il en serait de même pour toutes les polaires des deux courbes, car ces polaires déterminent, sur $F = 0$, les polaires binaires (d'ordre pair) des $2n$ points fondamentaux. En désignant par z un point arbitraire de la conique, on aurait donc

$$\alpha_x^n = \beta_x^n + b_x^{n-2}\,p_x^2,$$
$$n\,\alpha_x^{n-1}\,\alpha_z = n\,\beta_x^{n-1}\,\beta_z + (n-2)\,b_x^{n-3}\,b_z\,p_x^2 + 2\,b_x^{n-2}\,p_x p_z.$$

D'autre part, le premier membre doit être de la forme

$$n\beta_x^{n-1}\,\beta_z + B\,p_x^2,$$

et, par conséquent, nous pouvons poser

$$b_x^{n-2} = b_x'^{n-4}\,p_x^2.$$

En continuant de raisonner d'une manière analogue, on est con-

---

([1]) Nous remarquons qu'elle reste aussi déterminée si les $2n$ zéros de la forme binaire se confondent en un même point. La tangente de $F = 0$ en ce point, comptée n fois, est alors la seule courbe d'ordre n dont toutes les polaires ne rencontrent la conique que dans son point de contact. Donc, *si* $a_x^n = 0$ *a, avec la conique, un contact d'ordre* $2n - 1$, *la forme* α_x^n, *donnée par* (7) *ou* (8), *est une puissance d'une forme linéaire.*

duit aux relations

$$b_x^{n-2} = [p_x^2]^{r-1}\mathrm{C} \quad \text{pour} \quad n = 2r$$
$$= [p_x^2]^{r-1} u_x \quad \text{pour} \quad n = 2r+1,$$

C étant une constante et u_x une forme linéaire. Cependant il faut que l'on ait $\mathrm{C} = 0$ et $u_x = 0$; car d'ailleurs, comme on le vérifie aisément, les relations

$$(\alpha pp')^2 \alpha_x^{n-2} = 0, \quad (\beta pp')^2 \beta_x^{n-2} = 0, \quad (pp'p'')^2 \gtrless 0$$

ne pourraient être satisfaites à la fois.

8. Je vais indiquer une application immédiate que l'on peut faire des résultats que nous venons d'établir, et du lien qui existe, d'après nos recherches antérieures, entre la théorie des formes binaires et celle des formes ternaires. Il est connu que le tact-invariant d'une courbe algébrique quelconque et d'une courbe unicursale se trouve donné par le discriminant d'une certaine forme binaire. On obtient cette forme en exprimant les coordonnées des points de la courbe unicursale par deux paramètres homogènes et en formant le premier membre de l'équation algébrique dont dépendent les intersections des deux courbes proposées. Ainsi, le tactinvariant se présente exprimé par les invariants d'une forme binaire; cependant on a encore à vaincre quelques difficultés, quand on se propose de l'*exprimer par les invariants simultanés des deux formes qui, égalées à zéro, représentent les deux courbes*. C'est ce problème dont nous pouvons donner la solution, par notre méthode, pour le cas particulier où la courbe unicursale est notre conique fixe $p_x^2 = 0$.

Soit l'équation d'une courbe algébrique quelconque donnée par $a_x^n = 0$. Ses $2n$ points d'intersection avec la conique sont représentés par les zéros d'une forme binaire a_ξ^{2n}, d'après les formules (1) et (6) de ma première Note [1]. Le discriminant de cette forme sera donc le tactinvariant cherché. Lorsque la courbe d'ordre n touche la conique, chaque autre courbe du même ordre qui passe par leurs $2n$ intersections, jouit de la même propriété. En particulier, on peut remplacer, sans altérer le tactinvariant, la courbe $a_x^n = 0$

[1] Il n'y aura aucune ambiguïté si j'applique ici et dans ce qui va suivre les mêmes symboles a_i pour la forme ternaire a_x^n que pour la forme binaire a_ξ^{2n}.

par cette courbe $\alpha_x^n = 0$ qui est attachée à la forme binaire a_ξ^{2n} de la manière convenue, et dont on peut former l'équation à l'aide des relations (7) ou (8). En appliquant les formules fondamentales que j'ai établies dans ma première Note et qui expriment les facteurs symboliques (ab), a_x des covariants et des invariants de la forme binaire a_ξ^{2n} par les facteurs symboliques $(\alpha\beta\gamma)$, $(\alpha\beta p)$, $(\alpha p p')$, $(pp'p'')$, α_x, p_x des covariants et des invariants simultanés de α_x^n et de p_x^2, nous sommes à même de remplacer immédiatement les invariants de la forme a_ξ^{2n} qui figurent dans l'expression de son discriminant, par les invariants simultanés de α_x^n et p_x^2. Or nous pouvons supposer connue, d'après les recherches de M. Gordan ([1]), l'expression symbolique du discriminant; par conséquent, *nous pouvons calculer le tactinvariant de α_x^n et de p_x^2, sous forme invariante.* Cela posé, il nous reste à introduire les coefficients de a_x^n au lieu des coefficients de α_x^n, et ce sont encore les équations (7) et (8) qui nous permettent d'achever parfaitement la solution de la question. Évidemment on établira d'une manière analogue, en partant des relations correspondantes de la théorie des formes binaires, les conditions pour des contacts d'ordre supérieur de la conique avec une courbe algébrique quelconque, comme on va le voir par un cas particulier.

J'espère pouvoir communiquer prochainement à la Société les résultats des calculs indiqués, pour le cas $n = 3$, où il s'agit d'exprimer le tactinvariant d'une conique et d'une cubique quelconque par leurs invariants simultanés.

9. Je me borne ici à appliquer ce raisonnement au cas $n = 2$, pour lequel, d'ailleurs, les résultats sont connus. *Cherchons donc le tactinvariant des deux coniques arbitraires :*

$$a_x^2 = b_x^2 = c^2 = 0 \quad \text{et} \quad p_x^2 = p_x'^2 = p_x''^2 = 0.$$

Leurs invariants simultanés seront définis par les équations

$$\Delta = (pp'p'')^2 = 3D^4 \quad ([2]), \tag{9}$$

$$\Delta' = (app')^2, \quad \Delta'' = (abp)^2, \quad \Delta''' = (abc)^2. \tag{10}$$

([1]) *Mathematische Annalen*, t. III. — *Voir* aussi Clebsch, *Theorie der binären Formen*, § 20.

([2]) *Voir* le calcul qui nous a servi pour établir l'équation (20) de ma Note précitée. La quantité D est définie par l'équation (3) de cette Note.

En vertu de (7), la conique $\alpha_x^2 = 0$, attachée à la forme binaire a_ξ^4 qui représente les intersections de $a_x^2 = 0$ et $p_x^2 = 0$, est

$$(11) \qquad 0 = \alpha_x^2 = \beta_x^2 = \gamma_x^2 = a_x^2 \Delta - p_x^2 \Delta' = b_x^2 \Delta - p_x^2 \Delta'.$$

En effet, la condition $(\alpha p p')^2 = 0$ est satisfaite identiquement par cette conique $\alpha_x^2 = 0$.

Le discriminant de a_ξ^4 est donné par $i^3 - 6j^2$ où, d'après les formules (20) et (14) de ma première Note,

$$(12) \qquad \begin{cases} D^4 i = D^4 (ab)^4 = -2(\alpha\beta p)^2, \\ D^4 j = D^4 (ab)^2 (bc)^2 (ca)^2 = (\alpha\beta\gamma)^2. \end{cases}$$

En appliquant, deux fois de suite, la formule (11) et en ayant égard à la relation $(\alpha p p')^2 = 0$, on trouve

$$(\alpha\beta p)^2 = (a\beta p')^2 \Delta = \Delta[(abp)^2 \Delta - (ap'p)^2 \Delta'] = \Delta(\Delta\Delta'' - \Delta'^2),$$

et de même

$$\begin{aligned}(\alpha\beta\gamma)^2 &= (abc)^2 \Delta^3 - 3\Delta^2\Delta'(abp)^2 + 3\Delta\Delta'^2(app')^2 - \Delta'^3(pp'p'')^2 \\ &= \Delta(\Delta'''\Delta^2 - 3\Delta\Delta'\Delta'' + 2\Delta'^3).\end{aligned}$$

Δ étant égal à $3D^4$, on en tire

$$(13) \qquad i = -6(\Delta\Delta'' - \Delta'^2)$$

$$(14) \qquad j = 3(\Delta'''\Delta^2 - 3\Delta\Delta'\Delta'' + 2\Delta'^3),$$

et de là

$$(15) \qquad \begin{cases} i^3 - 6j^2 = -54[4(\Delta\Delta'' - \Delta'^2)^3 + (\Delta^2\Delta''' - 3\Delta\Delta'\Delta'' + 2\Delta'^3)^2] \\ \qquad = 54\Delta^2[6\Delta\Delta'\Delta''\Delta''' + 3\Delta'^2\Delta''^2 \\ \qquad\qquad - \Delta^2\Delta'''^2 - 4\Delta\Delta''^3 - 4\Delta'^3\Delta''']. \end{cases}$$

Or c'est en effet, au facteur Δ^2 près, l'expression connue du tact-invariant cherché.

10. Si *les deux coniques ont entre elles un contact du second ordre,* l'équation $a_\xi^4 = 0$ doit avoir une racine triple, ce qui arrivera quand on a, à la fois, $i = 0$ et $j = 0$. A l'aide des relations (13) et (14), on en déduit immédiatement les conditions ternaires, également connues,

$$(16) \qquad \frac{'\Delta}{\Delta'} = \frac{\Delta'}{\Delta''} = \frac{\Delta''}{\Delta'''} \quad (^1).$$

11. *Les coniques auront deux contacts distincts, chacun du premier ordre,* si la forme binaire a_ξ^4 est le carré d'une forme quadratique, c'est-à-dire si l'on a

$$i\mathrm{H} - j a_\xi^4 = 0,$$

en désignant par H la hessienne de a_ξ^4, savoir

$$\mathrm{H} = (ab)^2 a_\xi^2 b_\xi^2.$$

Pour établir la relation ternaire correspondante, nous appliquons la relation (18) de ma Note antérieure qui nous donne

$$(17) \qquad \mathrm{D}^6\mathrm{H} = \zeta^2 (\alpha p' p'')(\beta p' p'')\alpha_x \beta_x \quad (^2),$$

ou, en vertu de (11),

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}^6\mathrm{H} &= \zeta^2 [(ap'p'')a_x\Delta - (pp'p'')p_x\Delta'][(bp'p'')b_x\Delta - (p'''p'p'')p'''_x\Delta'] \\
&= \zeta^2 [(ap'p'')(bp'p'')a_x b_x \Delta^2 - 2\Delta\Delta'(ap'p'')(pp'p'')a_x p_x \\
&\qquad + \Delta'^2 (pp'p'')(p'''p'p'')p_x p'''_x].
\end{aligned}$$

Transformons le deuxième membre à l'aide des égalités

$$\begin{aligned}
(pp'p'')(ap'p'')p_x &= \frac{1}{3}(pp'p'')[(ap'p'')p_x - (app'')p'_x + (app')p''_x] \\
&= \frac{1}{3}(pp'p'')^2 a_x = \frac{1}{3}\Delta a_x, \\
(pp'p'')(p'''p'p'')p_x &= \frac{1}{3}(pp'p'')^2 p'''_x = \frac{1}{3}\Delta p'''_x,
\end{aligned}$$

et négligeons, aux deux membres, le facteur $\Delta = 3\mathrm{D}^4$; alors il vient

$$\mathrm{D}^2\mathrm{H} = \zeta^2[3\Delta(ap'p'')(bp'p'')a_x b_x - 2\Delta\Delta' a_x^2 + \Delta'^2 p_x^2].$$

Pour les calculs suivants, il sera utile d'introduire, au lieu de

---

(1) *Voir* le *Traité des sections coniques*, par M. Salmon.

(2) On pourrait aussi partir de l'équation (16) de la Note citée. Cependant il faudrait y poser, au premier membre, D^{2n+2} à la place de $4\mathrm{D}^{2n+2}$; de même, dans l'équation (15), il faut diviser le dernier membre par 2.

$(app')(bpp')a_x b_x$, un autre covariant, qui est symétrique par rapport aux coefficients de a_x^2 et de p_x^2, comme on vérifie aisément par les identités connues, savoir :

$$(18)\quad \varphi_x^2 = \Delta' a_x^2 - (app')(bpp')a_x b_x = \Delta'' p_x^2 - (pab)(p'ab)p_x p'_x.$$

A l'aide de cette forme, nous obtenons la formule

$$(19)\qquad D^2 H = \zeta^2(\Delta\Delta' a_x^2 + \Delta'^2 p_x^2 - 3\Delta\varphi_x^2).$$

Nous aurons encore besoin de la relation suivante, qui découle de (11) et de l'équation (6) de la Note précitée

$$(20)\qquad D^2 a_\xi^4 = \zeta^2 \alpha_x^2 = \zeta^2(\Delta a_x^2 - \Delta' p_x^2).$$

Pour obtenir la relation ternaire correspondant à l'équation $iH - ja_\xi^4 = 0$, nous pouvons négliger, dans les dernières formules, tous les termes qui contiennent le facteur p_x^2, car les relations (19) et (20) supposent toujours que $p_x^2 = 0$. Ainsi la condition

$$iH - ja_\xi^4 = 0$$

se transforme, par (13), (14), (19) et (20), en

$$(21)\qquad a_x^2 \Delta(\Delta'\Delta'' - \Delta\Delta''') + 6\varphi_x^2(\Delta\Delta'' - \Delta'^2) = Cp_x^2,$$

C étant une constante indéterminée. Nous pouvons la calculer, en posant, en particulier,

$$x_1 = c_2 d_3 - c_3 d_2,\quad x_2 = c_3 d_1 - c_1 d_3,\quad x_3 = c_1 d_2 - c_2 d_1.$$

Alors il vient

$$a_x^2 = (acd)^2 = \Delta''',\quad p_x^2 = (pcd)^2 = \Delta'',$$

$$\begin{aligned}\varphi_x^2 &= \Delta'\Delta''' - (app')(bpp')(acd)(bcd)\\ &= \Delta'\Delta''' - \frac{1}{3}(app')(bcd)[(acd)(bpp') - (abd)(cpp') + (abc)(dpp')]\\ &= \Delta'\Delta''' - \frac{1}{3}(app')^2(bcd)^2 = \frac{2}{3}\Delta'\Delta''',\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$5\Delta\Delta'\Delta''\Delta''' - 4\Delta'^3\Delta''' - \Delta^2\Delta'''^2 = C\Delta''.$$

Or le tactinvariant des deux coniques est nul dans le cas envisagé;

par suite, l'équation (15) nous donne

$$C\Delta'' = 5\Delta\Delta'\Delta''\Delta''' - 4\Delta'^3\Delta''' - \Delta^2\Delta'''^2 = 4\Delta\Delta''^3 - 3\Delta'^2\Delta''^2 - \Delta\Delta'\Delta''\Delta'''$$

ou bien

$$C = 4\Delta\Delta''^2 - 3\Delta'^2\Delta'' - \Delta\Delta'\Delta'''.$$

La condition (21) devient ainsi

$$(22)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\Delta(\Delta'\Delta'' - \Delta\Delta''')a_x^2 + 6(\Delta\Delta'' - \Delta'^2)\varphi_x^2 \\ &\quad + (\Delta\Delta'\Delta''' + 3\Delta'^2\Delta'' - 4\Delta\Delta''^2)p_x^2 = 0. \end{aligned} \right.$$

Il doit donc exister une relation linéaire entre les trois formes quadratiques a_x^2, p_x^2 *et* φ_x^2.

12. Ce résultat s'accorde parfaitement avec une autre forme, sous laquelle j'ai donné, dans mon édition des *Leçons de Clebsch*, t. I, p. 298, la condition pour que les deux coniques $a_x^2 = 0$ et $p_x^2 = 0$ se touchent en deux points distincts, savoir :

$$(23)\quad (\Delta\Delta'' - \Delta'^2)F_{22} - (\Delta\Delta''' - \Delta'\Delta'')F_{12} + (\Delta'\Delta''' - \Delta''^2)F_{11} = 0,$$

où

$$F_{22} = (abu)^2, \quad F_{12} = (pau)^2, \quad F_{11} = (pp'u)^2.$$

En effet, on tire de (23)

$$(24)\quad \left\{ \begin{aligned} &(\Delta\Delta'' - \Delta'^2)(abu)(abv) - (\Delta\Delta''' - \Delta'\Delta'')(apu)(apv) \\ &\qquad + (\Delta'\Delta''' - \Delta''^2)(pp'u)(pp'v) = 0. \end{aligned} \right.$$

Il faut que cette relation ait lieu quelles que soient les quantités u_i et v_i. Posons donc, en particulier,

$$u_i = p''_x p''_i, \quad v_i = p'''_x p'''_i.$$

Alors nous obtenons

$$\begin{aligned}
(abu)(abv) &= (abp)(abp')p_x p'_x &&= \Delta'' p_x^2 - \varphi_x^2, \\
(apu)(apv) &= (app')(app'')p'_x p''_x &&= \frac{1}{2}(app')p''_x[(app'')p'_x - (ap'p'')p_x] \\
& &&= \frac{1}{2}(app')p''_x[(app')p''_x - (pp'p'')a_x] \\
& &&= \frac{1}{2}\Delta' p_x^2 - \frac{1}{6}\Delta a_x^2,
\end{aligned}$$

$$(pp'u)(pp'v) = (pp'p'')(pp'p''')p''_x p'''_x = \frac{1}{3}\Delta p_x^2.$$

En vertu de ces trois relations, l'équation (24) devient

$$\frac{1}{6}\Delta(\Delta\Delta''' - \Delta'\Delta'')a_x^2 - (\Delta\Delta'' - \Delta'^2)\varphi_x^2$$
$$- \left(\frac{1}{6}\Delta\Delta'\Delta''' + \frac{1}{2}\Delta'^2\Delta'' - \frac{2}{3}\Delta\Delta''^2\right)p_x^2 = 0,$$

c'est-à-dire la relation même que nous venons de déduire, par notre méthode, de la théorie des formes binaires biquadratiques.

13. Il nous reste à considérer le cas où *les deux coniques ont entre elles un contact du troisième ordre*. Dans ce cas, la forme binaire a_ξ^4 devient la quatrième puissance d'une forme linéaire; par conséquent on a la condition binaire $H = 0$, et de là, en vertu de (19), la condition ternaire

$$3\varphi_x^2 - \Delta' a_x^2 = C p_x^2,$$

C étant une constante. En posant, comme à la fin du n° **11**,

$$x_1 = c_2 d_3 - c_3 d_2, \quad x_2 = c_3 d_1 - c_1 d_3, \quad x_3 = c_1 d_2 - c_2 d_1.$$

on trouve

$$2\Delta'\Delta''' - \Delta'\Delta''' = C\Delta'',$$

ou, en appliquant les relations (16), qui sont satisfaites,

$$C = \Delta''.$$

Le cas envisagé se trouve donc caractérisé par la condition

(25) $$3\varphi_x^2 - \Delta' a_x^2 - \Delta'' p_x^2 = 0,$$

jointe aux relations du n° **10**, savoir :

(26) $$\frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{\Delta'}{\Delta''} = \frac{\Delta''}{\Delta'''}.$$

L'équation (25) ne diffère pas essentiellement des deux conditions que j'ai données dans mon édition des *Leçons de Clebsch*, p. 299 :

$$\Delta'''(pp'u)^2 - 2\Delta''(apu)^2 + \Delta'(abu)^2 = 0,$$
$$\Delta''(pp'u)^2 - 2\Delta'(apu)^2 + \Delta\,(abu)^2 = 0,$$

dont l'une découle de l'autre à l'aide des relations (26). On pourra en déduire la condition (25) par un calcul analogue à celui que nous venons d'effectuer au n° 12.

14. Je profite de cette occasion pour corriger une application prématurée qui se trouve dans ma Note antérieure. J'y ai parlé du faisceau de formes binaires

$$(27)\qquad k a_\xi^6 + l(ab)^2(bc)^2(ca)^2 a_\xi^2 b_\xi^2 c_\xi^2 = 0,$$

auquel correspond le faisceau de cubiques

$$(28)\qquad \varkappa \alpha_x^3 + \lambda(\alpha\beta\gamma)^2 \alpha_x \beta_x \gamma_x = 0.$$

Or la cubique $(\alpha\beta\gamma)^2\alpha_x\beta_x\gamma_x = 0$ ne jouit pas de cette propriété, que toutes ses coniques polaires soient harmoniquement circonscrites à la conique $p_x^2 = 0$; donc les invariants et covariants des courbes du faisceau (28) ne se transforment pas en ceux des formes binaires du faisceau (27) par les mêmes formules que les invariants et covariants de α_x^2 en ceux de a_ξ^6. Par conséquent, les énoncés qui se rapportent à la forme $j_{\varkappa\lambda}$ et aux invariants $S_{\varkappa\lambda}$ et $T_{\varkappa\lambda}$, et que j'avais donnés antérieurement, ne sont pas exacts. A la page 120 du tome V du *Bulletin*, il faut effacer douze lignes, à partir des mots « Pour chacune » jusqu'à l'équation $T_{\varkappa\lambda} = 0$. En outre, page 119, ligne 10, il faut lire *circonscrites* au lieu de *inscrites*.