

# BULLETIN DE LA S. M. F.

P. TCHÉBICHEF

**Sur la résultante de deux forces appliquées  
à un seul point**

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 6 (1878), p. 188-193

<[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1878\\_\\_6\\_\\_188\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__188_1)>

© Bulletin de la S. M. F., 1878, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*Sur la résultante de deux forces appliquées à un seul point;*  
par M. P. TCHEBICHEF.

(Séance du 14 juillet 1878.)

1. D'après un théorème sur les angles compris entre les plans qui passent par un point, on parvient aisément à une relation très-remarquable entre les angles que font les trois forces  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,

appliquées à un seul point et les résultantes de ces forces, prises deux à deux, savoir :

$$(1) \quad \frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])} \frac{\sin(R_2, [R_2, R_3])}{\sin(R_3, [R_2, R_3])} \frac{\sin(R_3, [R_3, R_1])}{\sin(R_1, [R_3, R_1])} = 1,$$

où, par

$$[R_1, R_2], \quad [R_2, R_3], \quad [R_3, R_1],$$

nous désignons les résultantes des forces  $R_1$  et  $R_2$ ,  $R_2$  et  $R_3$ ,  $R_3$  et  $R_1$ , et par

$$(R_1, [R_1, R_2]), \quad (R_2, [R_1, R_2]), \quad (R_2, [R_2, R_3]), \quad \dots$$

les angles entre les résultantes et les forces qui les composent.

C'est cette équation qui servait de base à deux nouvelles démonstrations du *parallélogramme des forces*, données en décembre 1875 par M. Darboux dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, et par moi dans une Communication faite à la *Société mathématique de Moscou* <sup>(1)</sup>.

Nous allons montrer maintenant comment on peut trouver, d'après cette équation, la valeur du rapport

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])},$$

sans rien admettre sur la direction de la résultante et la continuité.

2. Après avoir remarqué, d'après l'équation (1), que le rapport

$$\frac{\sin(R_3, [R_1, R_3])}{\sin(R_1, [R_1, R_3])}$$

ne dépend pas de l'angle fait par les forces  $R_1$ ,  $R_3$  <sup>(2)</sup>, nous supposons que cet angle est réduit à 120 degrés, et nous désignons par  $\varphi$  l'angle entre la force  $R_1$  et la résultante  $[R_1, R_3]$  des deux forces

<sup>(1)</sup> *Recueil mathématique de la Société*, 1876. (Extrait du protocole de la séance du 14 décembre 1875.)

<sup>(2)</sup> Voir la démonstration du parallélogramme des forces de M. Darboux, citée plus haut.

$R_1, R_3$ . Nous obtenons ainsi

$$\frac{\sin(R_3, [R_1, R_3])}{\sin(R_1, [R_1, R_3])} = \frac{\sin(120^\circ - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \varphi + \frac{1}{2}.$$

Mais on reconnaît aisément que la résultante d'un tel système de deux forces ne sera pas altérée si l'on diminue de 60 degrés l'angle compris entre elles, et que l'on diminue en même temps la force  $R_1$  de  $R_3$ ; car un tel changement de notre système peut évidemment être effectué si l'on y ajoute trois forces égales à  $R_3$  et disposées symétriquement autour du point d'application, savoir : deux forces dans les directions opposées aux deux forces en question, et la troisième faisant avec ces forces un angle de 60 degrés. Or, pour le système de deux forces  $R_1, R_3$  ainsi modifié, on aura, d'après notre notation,

$$\frac{\sin(R_3, [R_1 - R_3, R_3])}{\sin(R_1, [R_1 - R_3, R_3])} = \frac{\sin(60^\circ - \varphi)}{\sin \varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cot \varphi - \frac{1}{2},$$

ce qui, étant retranché de la formule précédente, nous donne

$$\frac{\sin(R_3, [R_1, R_3])}{\sin(R_1, [R_1, R_3])} - \frac{\sin(R_3, [R_1 - R_3, R_3])}{\sin(R_1 - R_3, [R_1 - R_3, R_3])} = 1.$$

3. En remplaçant, dans cette équation,  $R_1$  par

$$R_0, \quad R_0 - R_3, \quad R_0 - 2R_3, \quad \dots, \quad R_0 - (m-1)R_3,$$

que nous supposons toutes ne pas être inférieures à  $R_3$ , nous trouvons une série d'équations qui donnent

$$\frac{\sin(R_3, [R_0, R_3])}{\sin(R_0, [R_0, R_3])} - \frac{\sin(R_3, [R_0 - mR_3, R_3])}{\sin(R_0 - mR_3, [R_0 - mR_3, R_3])} = m,$$

ce qu'on peut mettre sous la forme

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\sin(R_3, [R_0, R_3])}{\sin(R_0, [R_0, R_3])} \\ & = \frac{R_0}{R_3} \left( 1 + \frac{R_0 - mR_3}{R_0} \left\{ \frac{R_3 \sin(R_3, [R_0 - mR_3, R_3])}{(R_0 - mR_3) \sin(R_0 - mR_3, [R_0 - mR_3, R_3])} - 1 \right\} \right) \end{aligned} \right\},$$

en remplaçant le nombre  $m$  par la différence

$$\frac{R_0}{R_3} - \frac{R_0 - mR_3}{R_3},$$

égale à ce nombre.

C'est à l'aide de cette formule que nous parvenons à tirer de l'équation (1) la valeur du rapport

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])}.$$

4. A cet effet, nous supposons que, pour une force quelconque  $r$ , on ait trouvé une quantité  $L$  telle que la valeur numérique de

$$\frac{r \sin(r, [r, r_1])}{r_1 \sin(r_1, [r, r_1])} - 1$$

ne surpasse pas  $L$  pour toutes les valeurs de  $r_1$  depuis  $r_1 = r$  jusqu'à  $r_1 = 2r$ , l'angle  $(r, r_1)$  étant égal à 90 degrés. Dans cette supposition, en désignant par  $\theta, \theta^{(0)}$  des quantités comprises entre zéro et 1, nous aurons, pour toutes les valeurs de  $r_1 = r + \theta r$ , cette formule

$$\frac{r \sin(r, [r, r + \theta r])}{(r + \theta r) \sin(r, [r + \theta r])} - 1 = \pm \theta^{(0)} L.$$

Comme il est certain que la résultante ne change pas de direction quand on remplace les forces par leurs sous-multiples, on aura de même

$$(3) \quad \frac{R_3 \sin(R_3, [R_3, R_3 + \theta R_3])}{(R_3 + \theta R_3) \sin(R_3 + \theta R_3, [R_3, R_3 + \theta R_3])} - 1 = \pm \theta^{(0)} L,$$

pour toutes les valeurs de

$$(4) \quad R_3 = \frac{r}{n},$$

$n$  étant un nombre entier.

5. Mais, en prenant dans l'équation (2) pour  $m$  la partie entière du quotient  $R_0 - R_3 : R_3$ , on aura

$$R_0 - nR_3 = R_3 + \theta R_3,$$

et, pour cette valeur de  $m$ , l'équation (2) devient

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(R_3, [R_0, R_3])}{\sin(R_0, [R_0, R_3])} \\ &= \frac{R_0}{R_3} \left\{ 1 + \frac{R_3 + \theta R_3}{R_0} \left\{ \frac{R_3 \sin(R_3, [R_3, R_3 + \theta R_3])}{(R_3 + \theta R_3) \sin(R_3 + \theta R_3, [R_3, R_3 + \theta R_3])} - 1 \right\} \right\}, \end{aligned}$$

qui, d'après (3), dans le cas de

$$R_3 = \frac{r}{n},$$

nous donne

$$\frac{\sin(R_3, [R_0, R_3])}{\sin(R_0, [R_0, R_3])} = \frac{R_0}{R_3} \left[ 1 \pm \frac{R_3 + \theta R_0}{R_0} \theta^{(0)} L \right].$$

En posant, dans cette formule,

$$R_0 = R_1, \quad R_0 = R_2,$$

et en désignant par

$$\theta_1, \quad \theta_2, \\ \theta_1^{(0)}, \quad \theta_2^{(0)}$$

les valeurs correspondantes de  $\theta$  et  $\theta^{(0)}$ , nous obtenons

$$\frac{\sin(R_3, [R_1, R_3])}{\sin(R_1, [R_1, R_3])} = \frac{R_1}{R_3} \left[ 1 \pm \frac{R_3 + \theta_1 R_1}{R_1} \theta_1^{(0)} L \right], \\ \frac{\sin(R_3, [R_2, R_3])}{\sin(R_2, [R_2, R_3])} = \frac{R_2}{R_3} \left[ 1 \pm \frac{R_3 + \theta_2 R_2}{R_2} \theta_2^{(0)} L \right].$$

6. En portant ces valeurs dans l'équation (1), nous trouvons qu'elle donnera

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1 \pm \frac{(1 + \theta_2) R_2}{R_2} \theta_2^{(0)} L}{1 \pm \frac{(1 + \theta_1) R_2}{R_1} \theta_1^{(0)} L};$$

d'où, par la substitution de la valeur (4) de  $R_3$ , nous tirons cette formule :

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])} = \frac{R_2}{R_1} \frac{1 \pm \frac{(1 + \theta_2) r}{n R_2} \theta_2^{(0)} L}{1 \pm \frac{(1 + \theta_1) r}{n R_1} \theta_1^{(0)} L}.$$

Comme, dans cette formule, le nombre  $n$  peut être pris aussi grand qu'on le voudra, et que les quantités

$$\theta_1, \quad \theta_2, \quad \theta_1^{(0)}, \quad \theta_2^{(0)},$$

les seules qui dépendent du nombre  $n$  et des forces  $R_1, R_2$ , restent

comprises entre zéro et 1, on trouve, d'après cette formule, en faisant croître  $n$  à l'infini,

$$\frac{\sin(R_1, [R_1, R_2])}{\sin(R_2, [R_1, R_2])} = \frac{R_2}{R_1}.$$

---