BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 173-188
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__173_0>

Sur diverses formules récurrentes concernant les diviseurs des nombres entiers; par M. HALPHEN.

(Séances du 10 et du 24 avril 1878.)

1. J'ai communiqué précédemment à la Société ([1]) deux formules analogues à celle d'Euler concernant les sommes des diviseurs des nombres entiers. Comme la formule d'Euler, ces nouvelles formules, et beaucoup d'autres encore, se déduisent facilement des deux identités suivantes, dues à Jacobi ([2]) :

$$\prod_{i=1}^{i=\infty}\left(1-q^{(2i-1)n-m}\right)\left(1-q^{(2i-1)n+m}\right)\left(1-q^{2in}\right)=\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty}(-1)^i q^{ni^2+mi},$$

$$\prod_{i=1}^{i=\infty}\left(1+q^{(2i-1)n-m}\right)\left(1+q^{(2i-1)n+m}\right)\left(1-q^{2in}\right)=\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} q^{ni^2+mi}.$$

Sans faire appel à ces deux formules, je me propose actuellement d'obtenir par des considérations purement arithmétiques les résultats arithmétiques qu'on en peut faire découler. On pourra juger que les considérations très-simples dont je vais faire usage équivalent entièrement aux formules de Jacobi, quand on verra que ces dernières peuvent à leur tour s'en déduire.

Des formules de Jacobi on peut aussi tirer divers résultats relatifs à la partition des nombres, notamment de la première des deux formules pour le cas particulier $n=\frac{3}{2}$, $m=\frac{1}{2}$, cas dans lequel on a

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)=\ldots=\sum_{-\infty}^{+\infty}(-1)^i q^{\frac{i(3i+1)}{2}}.$$

Ce résultat avait été trouvé par Euler, qui en avait déduit, en premier lieu, la célèbre formule récurrente concernant les sommes de diviseurs et, en second lieu, cette propriété : *Le nombre des partitions d'un entier a en un nombre pair de parties positives et iné-*

([1]) *Voir* ce *Bulletin*, t. V et VI.

([2]) *Fundamenta nova.*

gales est supérieur d'une unité, ou inférieur d'une unité, ou bien précisément égal au nombre des partitions du même entier a en un nombre impair de parties positives et inégales, suivant que a est de la forme $\frac{i(3i+1)}{2}$ *ou de la forme* $\frac{i(3i-1)}{2}$, *ou bien n'est d'aucune de ces deux formes.*

Cette proposition a été démontrée directement par Jacobi [1]. Je ne m'en occuperai pas ici; si j'en parle actuellement, c'est pour rectifier une légère erreur qui s'est glissée à ce propos dans la belle édition des *Mémoires arithmétiques* d'Euler [2]. Le commentateur y cite Jacobi comme ayant démontré d'une manière élémentaire la *loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs,* et renvoie au Mémoire dans lequel Jacobi démontre, non pas cette loi, mais le théorème de partitions.

Une démonstration arithmétique de la loi d'Euler était donc encore à trouver, et c'est cette démonstration que je vais faire ici.

2. Mon analyse se fonde sur deux propriétés d'une équation indéterminée. Je considère les deux équations suivantes :

$$a - x^2 = (b - x)y, \tag{1}$$

$$a - x'^2 = (x' - b)y'. \tag{2}$$

Toutes les lettres représentent des nombres entiers :

a et b sont donnés et positifs;

y et y' doivent être positifs et impairs;

x et x' doivent être, en valeur absolue, inférieurs à $\sqrt{a}$.

Pour résoudre en nombres entiers les équations (1) et (2), on les écrira

$$y = \frac{a - b^2}{b - x} + b + x, \quad y' = \frac{a - b^2}{x' - b} - (b + x').$$

Soient δ et δ' des diviseurs de $(a - b^2)$ et δ_1, δ'_1 les diviseurs complémentaires. Les solutions seront comprises dans les formules

$$x = b - \delta, \quad y = \quad 2b + \delta_1 - \delta,$$
$$x' = b + \delta', \quad y' = -2b + \delta'_1 - \delta'.$$

---

(1) *Mathematische Werke*, t. I, p. 345.

(2) *L. Euleri Commentationes arithmeticæ collectæ.* Saint-Pétersbourg, 1849, t. I, p. LIX de l'Avertissement.

Il s'agit de distinguer, parmi ces solutions, celles qui satisfont aux conditions imposées :

1° y et y' doivent être impairs; donc δ_1 et δ, ainsi que δ'_1 et δ', doivent être de parités opposées; donc, tout d'abord, il n'y a pas de solution si a et b sont de parités opposées. Si maintenant a et b sont de même parité, $(a - b^2)$ est pair, et il faudra choisir pour δ, ainsi que pour δ', soit un diviseur impair, soit le complément d'un diviseur impair; cela fait, y et y' seront impairs.

2° y et y' doivent être positifs, et x^2, x'^2 inférieurs à a. Sur les équations proposées, on voit qu'on peut remplacer cette double condition par celle-ci : x^2 et x'^2 doivent être inférieurs à a, et $(b - x)$ et $(x' - b)$ doivent être positifs. On prendra donc δ et δ' positifs, et il restera à assurer les inégalités

$$x^2 < a, \quad x'^2 < a,$$

qui donnent lieu aux suivantes :

$$b - \sqrt{a} < \delta < b + \sqrt{a}, \tag{3}$$

$$\delta' < \sqrt{a} - b. \tag{4}$$

Ici il y a lieu de distinguer deux cas suivant le signe de $(a - b^2)$. En premier lieu, si b est supérieur à $\sqrt{a}$, la seconde inégalité ne peut être satisfaite puisque δ' doit être positif. L'équation (2) n'a donc pas de solution satisfaisant aux conditions imposées. A l'égard de l'équation (1), la première inégalité limite les diviseurs qu'il faut choisir; mais, si δ satisfait à ces inégalités, son complément δ_1 (pris positivement) y satisfait aussi, attendu que le produit des deux limites est $(b^2 - a)$, c'est-à-dire $\delta\delta_1$.

Donc, en désignant par δ un diviseur *impair* quelconque de $(b^2 - a)$, satisfaisant à (3), et par δ_1 son complément, on aura les solutions de (1) par couples, comme il suit :

$$x = b - \delta, \quad y = 2b - (\delta_1 + \delta),$$
$$x_1 = b - \delta_1, \quad y_1 = 2b - (\delta_1 + \delta).$$

Et, comme δ et δ_1 sont de parités opposées, on peut, en réunissant sous un même signe sommatoire toutes les solutions, conclure les deux égalités suivantes :

$$\Sigma(-1)^x = 0, \quad \Sigma(-1)^x y = 0.$$

En second lieu, si b est inférieur à $\sqrt{a}$, la limite inférieure dans (3) doit être remplacée par zéro. Soit alors Δ un diviseur de $(a - b^2)$ compris entre zéro et la limite (4). On pourra le prendre à la fois pour δ et pour δ', et l'on aura simultanément

$$\begin{aligned} x &= b - \Delta, & y &= 2b + \Delta_1 - \Delta, \\ x' &= b + \Delta, & y' &= -2b + \Delta_1 - \Delta; \end{aligned}$$

d'où, à l'égard de ces solutions, les égalités

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\Sigma(-1)^x = \Sigma(-1)^{x'}, \\ &\Sigma(-1)^x y + \Sigma(-1)^{x'} y' = 2(-1)^b \Sigma(-1)^\Delta(\Delta_1 - \Delta). \end{aligned} \right.$$

Quant aux diviseurs δ de $(a - b^2)$ compris entre la limite (4) et la limite supérieure (3), chacun d'eux fournit une solution de (1); mais, comme tout à l'heure, chacun d'eux a son complémentaire compris entre les mêmes limites. Alors, en désignant par δ un diviseur *impair*, on a deux solutions à la fois :

$$\begin{aligned} x &= b - \delta, & y &= 2b + \delta_1 - \delta, \\ x &= b - \delta_1, & y &= 2b + \delta - \delta_1, \end{aligned}$$

et ces solutions vérifient les égalités

$$(6) \qquad \Sigma(-1)^x = 0, \quad \Sigma(-1)^x y = 2(-1)^{b+1} \Sigma(\delta_1 - \delta).$$

Ajoutons la première de ces deux égalités membre à membre à la première des égalités (5), et concluons

$$(7) \qquad \Sigma(-1)^x - \Sigma(-1)^{x'} = 0,$$

les signes sommatoires s'appliquant maintenant à toutes les solutions de (1) et (2). On peut envisager cette égalité (7) comme s'appliquant aussi au cas précédent $(b - a^2 > 0)$. Elle exprime donc une propriété générale des équations (1) et (2).

Combinons de même la deuxième égalité (5) et la deuxième égalité (6). Dans (5) distinguons les diviseurs impairs par la lettre Δ, et les diviseurs pairs par la lettre Δ'. Soient Δ_1 et Δ'_1 leurs compléments respectifs; Δ_1 est pair et Δ'_1 impair. J'écrirai alors la combinaison obtenue de la sorte

$$\Sigma(-1)^x y + \Sigma(-1)^{x'} y' = 2(-1)^{b+1} \Sigma(\delta_1 - \delta + \Delta_1 - \Delta + \Delta' - \Delta'_1).$$

Ici δ est un diviseur impair compris entre $(\sqrt{a}-b)$ et $(\sqrt{a}+b)$, Δ un diviseur impair compris entre zéro et $(\sqrt{a}-b)$, Δ' un diviseur impair dont le complément est compris entre ces deux dernières limites; donc Δ' est lui-même supérieur à $(\sqrt{a}+b)$. Donc la somme des nombres $(\delta+\Delta+\Delta'_1)$ se compose de *tous* les diviseurs impairs de $(a-b^2)$. En désignant donc par δ un diviseur impair *quelconque* et par δ_1 son complément, on peut écrire

$$\Sigma(-1)^x y+\Sigma(-1)^{x'}y'+2(-1)^b\Sigma(\delta_1-\delta)=0.$$

Je désigne par $P(\omega)$ la somme des diviseurs *pairs* du nombre ω; on a manifestement

$$2\Sigma(\delta_1-\delta)=P(a-b^2);$$

donc enfin

$$(8)\qquad \Sigma(-1)^x y+\Sigma(-1)^{x'}y'+(-1)^b P(a-b^2)=0.$$

De même que (7), cette égalité peut être appliquée aussi au cas où $(a-b^2)$ est négatif, sous la convention que $P(\omega)$ se réduise à zéro quand ω est négatif. Pour qu'il n'y ait aucune restriction, il faut encore examiner ce que deviennent les égalités (7) et (8) dans le cas singulier où $(a-b^2)$ est nul, cas auquel l'analyse précédente ne s'applique pas, puisqu'elle repose sur la considération des diviseurs de $(a-b^2)$.

Les équations étant prises sous leur seconde forme, remarquons qu'on ne peut annuler $(b-x)$ ou $(x'-b)$; car alors la condition $x^2<a$, $x'^2<a$ ne serait pas respectée. Les équations se réduisent donc à

$$y=b+x,\quad y'=-(b+x').$$

La seconde est impossible, y' devant être positif, et x' inférieur en valeur absolue à b. La première admet les solutions

$$\begin{array}{llllll} x=1-b, & 3-b, & 5-b, & \ldots, & (2b-1)-b, \\ y=\;\;1, & 3, & 5, & \ldots, & 2b-1. \end{array}$$

et l'on a

$$\begin{aligned}\Sigma(-1)^x &=(-1)^{b+1}b,\\ \Sigma(-1)^x y&=(-1)^{b+1}b^2.\end{aligned}$$

Si maintenant on observe que le changement de b en $-b$, accompagné du changement de signe de x, permute entre elles les équations (1) et (2), on peut faire disparaître la condition que b soit positif et résumer toute cette analyse ainsi :

LEMME I.— *Soient a et b des entiers donnés, le premier positif, puis x et x' des entiers positifs ou négatifs inférieurs en valeur absolue à $\sqrt{a}$, et y, y' des entiers positifs et impairs, choisis de toutes les manières possibles pour satisfaire aux égalités*

$$a - x^2 = (b - x)y, \quad a - x'^2 = (x' - b)y'.$$

Soit aussi P(ω) *la somme des diviseurs positifs et pairs de l'entier positif ω, quantité que l'on réduit à zéro si ω n'est pas positif.*

1° *Si $(a - b^2)$ n'est pas nul, on a*

$$\Sigma(-1)^x - \Sigma(-1)^{x'} = 0, \quad \Sigma(-1)^x y + \Sigma(-1)^{x'} y' + (-1)^b \mathrm{P}(a - b^2) = 0.$$

2° *Si $(a - b^2)$ est nul, on a*

$$\Sigma(-1)^x - \Sigma(-1)^{x'} = (-1)^{b+1} b, \quad \Sigma(-1)^x y + \Sigma(-1)^{x'} y' = (-1)^{b+1} b^2.$$

3. Tout à l'heure je transformerai cet énoncé de manière à l'approprier à toutes les conséquences que j'ai en vue d'obtenir; mais je vais tout d'abord exposer les conséquences qu'on peut en tirer sous cette forme même.

THÉORÈME I. — *Soit $f(z)$ une fonction impaire : que l'on fasse la somme des expressions $(-1)^x f\left(\frac{a - x^2}{y} + x\right)$ en y prenant pour x tous les nombres entiers compris entre la racine carrée négative et la racine carrée positive de l'entier a, et pour y tous les diviseurs positifs et impairs de $(a - x^2)$. Cette somme est nulle si a n'est pas un carré ; et, si a est un carré, elle est égale à*

$$(-1)^{a+1} \sqrt{a} f(\sqrt{a}).$$

Pour prouver ce théorème, ramenons dans chaque terme de la somme l'argument de la fonction f à être, par exemple, positif, ce qui se peut, puisque cette fonction est impaire. Cherchons maintenant le coefficient de $f(b)$, b étant un entier positif quelconque. Pour avoir $f(b)$, il faudra poser l'une ou l'autre des deux égalités

$$\frac{a - x^2}{y} + x = b, \quad \frac{a - x^2}{y} + x = -b.$$

Eu égard au double signe que peut prendre x, on voit que ces deux équations coïncident avec (1) et (2); donc le coefficient de $f(b)$ dans la somme est précisément $\Sigma(-1)^x - \Sigma(-1)^{x'}$, c'est-à-dire zéro, sauf si $a = b^2$. Cette dernière circonstance se présente si a est un carré et qu'on choisisse $b = \sqrt{a}$. Dans ce cas, d'après le lemme, $f(b)$ a le coefficient $(-1)^{b+1} b$; donc le théorème est entièrement démontré.

4. Voici l'exemple le plus simple du théorème I; nous l'obtenons en posant $f(z) = z$. Dans la somme, réunissons deux à deux les termes qui ne diffèrent que par le signe de x; alors

$$f\left(\frac{a - x^2}{y} + x\right) + f\left(\frac{a - x^2}{y} - x\right) = 2\frac{a - x^2}{y}.$$

La somme des divers termes relatifs à une même valeur de x est ainsi le double de la somme des diviseurs de $(a - x^2)$, dont les compléments y sont impairs.

Ainsi, *en désignant par* $C(\omega)$ *la somme des diviseurs de* ω *dont les compléments sont impairs, on a*

$$C(a) - 2C(a-1) + 2C(a-4) - 2C(a-9)\ldots \pm 2C(a-n^2) = 0,$$

si a n'est pas un carré. Si, au contraire, a est un carré, le premier membre est égal à $(-1)^{a+1} a$. *La somme doit être prolongée jusqu'au dernier nombre positif* $(a - n^2)$.

On peut encore, à la manière d'Euler, écrire

$$C(a) = 2[C(a-1) - C(a-4)\ldots \pm C(a-n^2)\ldots],$$

en convenant, si a est un carré, de pousser jusqu'à $C(0)$, qu'on remplacera par $\frac{1}{2}a$.

C'est précisément une des formules que j'ai déjà communiquées à la Société. J'ai fait remarquer qu'on peut en faire découler les lois de la décomposition des nombres premiers en sommes de deux carrés; je répète ici cette remarque, qui s'applique aussi aux décompositions en trois carrés.

Si a n'est pas carré, le terme $\frac{1}{2}a$ n'existe pas dans la parenthèse; donc $C(a)$ est pair.

Si a n'est ni carré ni somme de deux carrés, alors, en outre, aucun des nombres $(a - n^2)$ n'est carré; tous les termes dans la parenthèse sont pairs, et $C(a)$ est divisible par 4.

Si a n'est ni carré ni somme de deux ou trois carrés, alors, en outre, aucun des nombres $(a - n^2)$ n'est somme de deux carrés, et tous les termes de la parenthèse sont divisibles par 4; donc $C(a)$ est divisible par 8.

Si maintenant a est premier, $C(a)$ est égal à $(a + 1)$; donc :

1° Un nombre premier non décomposable en somme de deux carrés est de la forme $(4m - 1)$;

2° Un nombre premier non décomposable en somme de deux ou trois carrés est de la forme $(8m - 1)$.

Donc inversement :

1° Tout nombre premier $(4m + 1)$ est somme de deux carrés;

2° Tout nombre premier $(8m + 3)$ est somme de trois carrés.

5. Si l'on fait $f(z) = z^3$, le théorème I donne une formule récurrente pour la somme $C_3(a)$ des cubes des diviseurs de a dont les compléments sont impairs, savoir :

$$\begin{aligned} C_3(a) = {} & 2[C_3(a-1) - C_3(a-4) \ldots \pm C_3(a-n^2) \ldots] \\ & + 6[C(a-1) - 2C(a-4) \ldots \pm nC(a-n) \ldots], \end{aligned}$$

à quoi, si a est un carré, il faut ajouter le terme complémentaire $(-1)^{a+1} a^2$. On peut multiplier les exemples analogues et en conclure que le théorème I permet de calculer, par voie de récurrence, les diviseurs mêmes des nombres; mais on peut, à cet effet, obtenir une formule simple en posant $f(z) = \alpha^z - \alpha^{-z}$. On a alors

$$\begin{aligned} & f(z+x) + f(z-x) \\ & \quad = \alpha^{z+x} - \alpha^{-z-x} + \alpha^{z-x} - \alpha^{-z+x} = (\alpha^z - \alpha^{-z})(\alpha^x + \alpha^{-x}). \end{aligned}$$

En conséquence, *si, de toutes les manières possibles, on pose*

$$a = (2k+1)p,$$

k et p étant positifs, et que l'on fasse $U(a) = \Sigma(\alpha^p - \alpha^{-p})$, *la fonction* $U(a)$ *satisfait à la formule récurrente*

$$\begin{aligned} U(a) = {} & \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) U(a-1) - \left(\alpha^2 + \frac{1}{\alpha^2}\right) U(a-4) + \ldots \\ & + (-1)^{n+1} \left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n}\right) U(a-n^2) + \ldots, \end{aligned}$$

dans laquelle, si a est un carré, le terme correspondant à $n^2 = a$ doit être remplacé par $(-1)^{a+1}\sqrt{a}\,(\alpha^{\sqrt{a}} - \alpha^{-\sqrt{a}})$.

6. Si, dans cette dernière formule, on divise tous les termes par $\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)$ et qu'on prenne ensuite, dans les deux membres, le coefficient de α^m, on obtient le résultat suivant :

Soit $V(a, m)$ *le nombre des diviseurs impairs de a qui sont inférieurs à $\frac{a}{m}$; cette fonction numérique satisfait à la formule récurrente*

$$\begin{aligned} V(a, m) = {} & V(a-1, m-1) - V(a-4, m-2)\ldots \\ & + (-1)^{n+1} V(a-n^2, m-n)\ldots \\ & + V(a-1, m+1) - V(a-4, m+2)\ldots \\ & + (-1)^{n+1} V(a-n^2, m+n)\ldots. \end{aligned}$$

Dans la première ligne, le nombre $(m - n)$ doit toujours être pris positivement. Si a est un carré, que m soit inférieur à $\sqrt{a}$ et en diffère d'un nombre impair, les deux termes correspondant à $n^2 = a$ doivent être remplacés par $(-1)^{a+1}\sqrt{a}$. Dans les autres cas, la formule se termine aux deux termes pour lesquels $(a - n^2)$ a la plus petite valeur positive possible.

Par exemple, pour $m = 0$, on a

$$V(a, 0) = 2[V(a-1, 1) - V(a-4, 2)\ldots + (-1)^{n+1} V(a-n^2, n)\ldots],$$

et cette formule ne comporte un terme complémentaire que si a est un carré impair. Ce terme complémentaire est alors $\sqrt{a}$.

Appliquons, par exemple, cette dernière formule au nombre 101; nous devons trouver 2 pour résultat, puisque le nombre envisagé est premier. Ainsi la somme des termes positifs de la parenthèse doit surpasser d'une unité la somme des termes négatifs. C'est ce qu'on vérifiera par le tableau suivant :

	Nombre.	Limite des diviseurs.	Diviseurs impairs.	Nombre de ceux qui sont inférieurs à la limite.
$V(a-1,1)=V(100,1)$	100	$\frac{100}{1}$	1, 5, 25	3
$V(a-9,3)=V(92,3)$	92	$\frac{92}{3}$	1, 23	2
$V(a-25,5)=V(76,5)$	76	$\frac{76}{5}$	1, 19	1
$V(a-49,7)=V(52,7)$	52	$\frac{52}{7}$	1, 13	1
$V(a-81,9)=V(20,9)$	20	$\frac{20}{9}$	1, 5	1
	Total			8
$V(a-4,2)=V(97,2)$	97	$\frac{97}{2}$	1, 97,	1
$V(a-16,4)=V(85,4)$	85	$\frac{85}{4}$	1, 5, 17, 85	3
$V(a-36,6)=V(65,6)$	65	$\frac{65}{6}$	1, 5, 13	2
$V(a-64,8)=V(37,8)$	37	$\frac{37}{8}$	1, 37	1
$V(a-100,10)=V(1,10)$	1	$\frac{1}{10}$	1	0
	Total			7

$$V(101,0)=2(8-7)=2.$$

7. Je n'ai appliqué jusqu'à présent que la première partie du lemme. En appliquant la seconde partie, j'obtiens la proposition suivante :

Théorème II. — *Soit* $F(x)$ *une fonction paire. On fait la somme des quantités* $(-1)^x y\, F\left(\frac{a-x^2}{y} \pm x\right)$ *en* y *prenant successivement pour* x *tous les entiers inférieurs à la racine carrée de l'entier* a, *et pour* y *tous les diviseurs positifs et impairs de* $(a-x^2)$. *On y ajoute la somme*

$$\frac{1}{2}P(a)F(0)+\sum_{x=1}^{x<\sqrt{a}} P(a-x^2)\,F(x),$$

dans laquelle $P(a)$ *est, comme plus haut, la somme des diviseurs pairs de a si a est positif, et zéro dans les autres cas.*

Si a n'est pas un carré, la somme obtenue est nulle. Si a est un carré, la somme est égale à $(-1)^{a+1} a F(\sqrt{a})$.

La démonstration se fait comme pour le théorème I. Dans la somme envisagée, le coefficient de $F(b)$ est

$$\Sigma(-1)^x y + \Sigma(-1)^{x'} y' + (-1)^b P(a - b^2),$$

ce qui, d'après le lemme, est égal à zéro, sauf dans le cas où b^2 est égal à a; donc la somme est zéro, à moins que a ne soit un carré.

Les applications les plus simples que l'on puisse faire du théorème II conduisent aux formules obtenues précédemment au moyen du théorème I; il n'y a donc pas lieu d'y insister pour le moment.

8. Je vais maintenant considérer les équations (1) et (2) sous une autre forme. J'envisagerai les deux équations

$$\frac{A - nx^2 - mx}{ny + m} + x = b, \tag{9}$$

$$\frac{A - nx'^2 - mx'}{ny' - m} - x' = -b, \tag{10}$$

dans lesquelles b est un entier donné, et A, n, m sont des nombres donnés quelconques, entiers ou non, n essentiellement positif et supérieur à la valeur absolue de m. Comme précédemment, x et x' doivent être entiers et astreints aux inégalités

$$nx^2 + mx < A, \quad nx'^2 + mx' < A, \tag{11}$$

et y, y' doivent être entiers, positifs et impairs.

Les équations (9), (10) se ramènent immédiatement aux équations (1), (2). Elles s'écrivent, en effet,

$$A - mb = n(x^2 - xy + by),$$
$$A - mb = n(x'^2 + x'y' - by').$$

Les deux quantités entre parenthèses étant des nombres entiers, les équations ne peuvent être résolues que s'il existe un nombre *entier a* vérifiant l'égalité

$$A - mb = na.$$

Supposons qu'il en existe effectivement un, c'est-à-dire que $\frac{A - mb}{n}$ soit un nombre entier; alors les équations se réduisent à

$$a = x^2 - xy + by,$$
$$a = x'^2 + x'y' - by'.$$

Ce sont précisément les équations (1) et (2). En second lieu, on a

$$y\frac{A - nx^2 - mx}{ny + m} = (b - x)y = a - x^2,$$
$$y'\frac{A - nx'^2 - mx'}{ny' - m} = (x' - b)y' = a - x'^2.$$

Puisque y et y' sont tous deux égaux au moins à l'unité, et que m est, en valeur absolue, inférieur à n, les dénominateurs $(ny + m)$, $(ny' - m)$ sont positifs comme y et y'; donc les inégalités (11), imposées à x et x', se confondent avec les inégalités $x^2 < a$, $x'^2 < a$.

En conséquence, la résolution des équations (9) et (10), avec les conditions imposées aux inconnues, coïncide exactement avec celle des équations (1) et (2). Je peux donc appliquer ici l'énoncé du lemme I convenablement transformé, et dire :

Lemme II. — *Soient* A, m, n *des nombres quelconques, le dernier positif et supérieur à la valeur absolue du second, et* b *un nombre entier. Soient aussi* y, y' *des entiers positifs et impairs,* x, x' *des entiers devant vérifier les inégalités*

$$nx^2 + mx < A, \quad nx'^2 + mx' < A,$$

ces nombres devant être choisis de toutes les manières possibles pour satisfaire aux équations

$$\frac{A - nx^2 - mx}{ny + m} + x = b, \quad \frac{A - nx'^2 - mx'}{ny' - m} - x' = -b.$$

Ces équations ne peuvent être résolues que si $\frac{A - nb^2 - mb}{n}$ *est un* *entier. Cette condition remplie, si l'on envisage toutes les solutions, on aura les relations suivantes :*

1° *Si* $(A - nb^2 - mb)$ *n'est pas nul,*

$$\Sigma(-1)^x - \Sigma(-1)^{x'} = 0,$$

$$\Sigma(-1)^x(ny + m) + \Sigma(-1)^{x'}(ny' - m) + (-1)^b nP\left(\frac{A - nb^2 - mb}{n}\right) = 0.$$

2° *Si* $(A - nb^2 - mb)$ *est nul,*

$$\Sigma(-1)^x - \Sigma(-1)^{x'} = (-1)^{b+1} b,$$

$$\Sigma(-1)^x(ny + m) + \Sigma(-1)^{x'}(ny' - m) = (-1)^{b+1} A.$$

9. Du lemme II je déduis le théorème suivant, généralisation du théorème I :

THÉORÈME III. — *Soient* A, m, n *des nombres quelconques, le dernier positif et supérieur à la valeur absolue du second. On fait la somme des expressions*

$$(-1)^x f\left(\frac{A - nx^2 - mx}{ny + m} + x\right) \quad \text{et} \quad (-1)^{x+1} f\left(x - \frac{A - nx^2 - mx}{ny - m}\right),$$

$f(z)$ *étant une fonction quelconque, et les entiers* x *et* y, *ce dernier positif et impair, étant choisis de toutes les manières possibles pour rendre entier l'argument de la fonction. Cette somme est nulle, sauf dans le cas où il existe un entier* α, *tel que* A *soit égal à* $(n\alpha^2 + m\alpha)$. *S'il existe un pareil entier, la somme est égale à* $(-1)^{\alpha+1}\alpha f(\alpha)$. *S'il existe deux pareils entiers* α, β, *la somme est égale à* $(-1)^{\alpha+1}\alpha f(\alpha) + (-1)^{\beta+1}\beta f(\beta)$.

On prouvera ce théorème en remarquant que, b étant un entier quelconque, le coefficient de $f(b)$ dans la somme est

$$\Sigma(-1)^x - \Sigma(-1)^{x'},$$

les sommations s'appliquant à toutes les solutions de (9) et (10).

10. On généralise de même le théorème II comme il suit :

THÉORÈME IV. — *Dans les mêmes conditions, on fait la somme* *des expressions*

$$(-1)^x(ny+m)f\left(\frac{A-nx^2-mx}{ny+m}+x\right),$$
$$(-1)^x(ny-m)f\left(x-\frac{A-nx^2-mx}{ny-m}\right),$$
$$(-1)^x nP\left(\frac{A-nx^2-mx}{n}\right)f(x).$$

Cette somme est nulle ou bien égale à l'une des deux quantités

$$(-1)^{\alpha+1}f(\alpha)A, \quad [(-1)^{\alpha+1}f(\alpha)+(-1)^{\beta+1}f(\beta)]A.$$

11. L'application la plus simple des théorèmes III et IV consistera à supposer $f(z)=1$. Le théorème III conduit ainsi à la conséquence suivante :

A *étant un nombre positif quelconque donné, ainsi que* m, n, *ce dernier positif et supérieur à la valeur absolue de* m, *on pose de toutes les manières,* k *et* k' *étant des entiers non négatifs, et* p, p' *des entiers quelconques,*

$$(11) \qquad \frac{A}{n(2k+1)+m}=p, \quad \frac{A}{n(2k'+1)-m}=p';$$

et l'on désigne par $D(A)$ *la fonction numérique égale à l'excès du nombre des solutions de la première équation sur le nombre des solutions de la seconde. Cette fonction satisfait à la formule récurrente*

$$\begin{aligned} D(A) = {} & D(A-n-m)-D(A-4n-2m)\ldots \\ & +(-1)^{x+1}D(A-nx^2-mx)\ldots \\ & +D(A-n+m)-D(A-4n+2m)\ldots \\ & +(-1)^{x+1}D(A-nx^2+mx)\ldots, \end{aligned}$$

les deux suites devant être arrêtées au dernier argument positif, et, si A *est de la forme* $n\alpha^2+m\alpha$, α *étant un entier, le terme* $D(0)$ *devant être remplacé par* α.

12. La même hypothèse, appliquée au théorème IV, conduit à cette autre conséquence :

Si l'on envisage l'équation $A=zp$, *dans laquelle* p *doit être* *un entier et z de l'une des formes*

$$n(2k+1)\pm m \text{ ou } 2nk, \quad k=0, 1, \ldots,$$

et qu'on désigne par S(A) *la somme des solutions* z, *cette fonction satisfait à la même formule récurrente*

$$\begin{aligned} S(A) = {} & S(A-n-m) - S(A-4n-2m)\ldots \\ & + (-1)^{x+1}S(A-nx^2-mx)\ldots \\ & + S(A-n+m) - S(A-4n+2m)\ldots \\ & + (-1)^{x+1}S(A-nx^2+mx)\ldots, \end{aligned}$$

dans laquelle, s'il y a lieu, S(o) *doit être remplacé par* A.

13. Dans ce dernier énoncé, si l'on suppose $n=\frac{3}{2}$, $m=\frac{1}{2}$, on obtient une formule récurrente pour la fonction S(A), qui est alors la somme de tous les diviseurs de A. En effet, les trois formes de z sont alors

$$3k+2, \quad 3k+1, \quad 3k,$$

c'est-à-dire que z est un entier quelconque. La formule récurrente est précisément celle d'Euler; c'est là *la loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs.*

L'énoncé du n° **11** montre également que *la formule récurrente d'Euler est aussi vérifiée par la fonction numérique* D(A) *qui est égale à l'excès du nombre des diviseurs* $3k+2$ *sur le nombre des diviseurs* $3k+1$ *du nombre* A. Ces deux formules ne diffèrent que par le terme complémentaire, et ce dernier existe dans le cas où A est de la forme $\frac{\alpha(3\alpha\pm 1)}{2}$.

14. Soit toujours S(A) la même fonction numérique qu'au n° **12**; je considère la série

$$Q = qS(1) + q^2S(2) + q^3S(3) + \ldots,$$

que l'on peut aussi écrire

$$Q = \sum \frac{zq^z}{1-q^z},$$

la sommation s'étendant à toutes les valeurs de z comprises dans les formules

$$z = (2k+1)n \pm m, \quad z = 2kn, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

La quantité $(-1)^x \Sigma S(A - nx^2 - mx)$ est le coefficient de q^A dans le produit de Q par la série

$$S = \sum_{x=-\infty}^{x=+\infty} (-1)^x q^{nx^2+mx}.$$

D'après le n° 12, ce coefficient est nul si A n'est pas de la forme $(nx^2 + mx)$; dans le cas opposé, ce coefficient est $\pm$ A. On a donc

$$S.Q = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^x q^{nx^2+mx} \times (nx^2 + mx).$$

Divisant par qS les deux membres de l'égalité, intégrant entre les limites zéro et q, puis revenant des logarithmes aux nombres, j'obtiens

$$\prod_{k=0}^{k=\infty} (1 - q^{(2k+1)n+m})(1 - q^{(2k+1)n-m})(1 - q^{2n}) = S,$$

c'est-à-dire l'une des identités dues à Jacobi.

En terminant, j'indique que les théorèmes III et IV, en subissant de très-légères modifications, s'appliquent au cas où les nombres m, n sont égaux. C'est à ce cas que se rapporte une formule récurrente que j'ai précédemment donnée dans ce *Bulletin;* mais il me semble inutile d'entrer à ce sujet dans plus de détails.