BULLETIN DE LA S. M. F.

DE POLIGNAC

Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 158-163

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__158_1>

Représentation graphique de la résolution en nombres entiers de l'équation indéterminée $ax + by = c$; par M. C. de Polignac.

(Séance du 4 avril 1877.)

La considération d'un réseau orthogonal ou échiquier indéfini a déjà été utilisée dans des Communications antérieures [1]. Je me propose d'en faire ici une nouvelle application.

---

[1] Edouard Lucas, *Théorèmes sur la Géométrie des quinconces,* séance du 7 novembre 1877. — Laisant, sur la même question, séance du 13 février 1878.

Le réseau étant supposé tracé, deux de ses lignes orthogonales sont prises pour axes, et chaque sommet est affecté d'un nombre égal à la somme de ses coordonnées prises avec leurs signes.

Les nombres égaux sont disposés sur les diagonales parallèles à la bissectrice $y = -x$, que nous appellerons, pour abréger, *diagonales négatives*.

Résoudre graphiquement l'équation $ax + by = c$ revient à partager l'échiquier en un nombre indéfini de rectangles élémentaires ayant pour côté horizontal a et pour côté vertical b, et à chercher les sommets de ces rectangles qui se trouvent sur la *diagonale négative c*.

En particulier, les solutions positives seront comprises dans l'angle des directions positives des axes.

Bornons-nous à la recherche de ces dernières, et supposons a et b premiers entre eux et $a < b$.

Il suffira de déterminer le sommet-solution le plus voisin de l'axe des x. Des raisons de symétrie évidentes feront de suite obtenir les autres.

Soient R, R′ les deux sommets de rectangles élémentaires (i, e les deux multiples de a) entre lesquels passe la diagonale e sur l'axe des x. Construisons les deux triangles égaux ABR, A′B′R′, dans lesquels les côtés de l'angle droit sont égaux à ab. Soit I le sommet-solution le plus voisin de l'axe des x. On a

$$\mathrm{HI} = b\beta,$$

où β est un nombre entier. D'ailleurs

$$\mathrm{HI} = \mathrm{H}c = \frac{c}{a} + \mathrm{HR} = \mathrm{R}c,$$

où HR égale un multiple de $a = a\alpha$. Or, en estimant les longueurs à partir de l'origine O, on aura

$$\mathrm{O}c = c \quad \text{et} \quad \mathrm{R}c = \mathrm{R}\left(\frac{c}{a}\right),$$

en désignant ainsi le *reste de la division de c par a*.

Il vient donc

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} b\beta = a\alpha + \mathrm{R}\dfrac{c}{a}, \\ b\beta - a\alpha = \mathrm{R}\dfrac{c}{a}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{array} \right.$$

où la solution en nombres positifs de l'équation indéterminée

$$ax + by = c$$

est ramenée à celle de l'équation (1). Tel est le résultat arithmétique auquel nous conduit l'inspection de l'échiquier. On aura $y_1 = \beta$, solution minima pour y.

Nombre de solutions positives. — On obtiendra la seconde solution positive en faisant glisser le triangle A′B′R′ le long de son hypoténuse, de façon à amener le point R′ en B′. Le point I viendra se placer sur un autre sommet-solution, dont la distance à l'axe des x sera évidemment donnée par la formule

$$by_2 = b\beta + ab, \quad \text{d'où} \quad y_2 = \beta + a = y_1 + a,$$

et ainsi de suite.

Désignons maintenant par Q un point pris sur l'axe des x tel que

$$\mathrm{OQ} = \left[\frac{c}{ab}\right] ab, \quad \ldots,$$

c'est-à-dire *le produit de ab par le quotient entier de c par ab.* On vérifiera aisément par le même procédé de glissement que, si la première solution I tombe à gauche de la verticale passant par Q, le nombre des solutions positives sera

$$\left[\frac{c}{ab}\right].$$

Si I tombe à droite de cette verticale, il sera

$$\left[\frac{c}{ab}\right] + 1;$$

de même si I tombe sur la verticale.

Sur la figure, cette condition s'exprime par

$$c\mathrm{Q} > c\mathrm{H},$$

c'est-à-dire

$$c\mathrm{Q} > \mathrm{HI} \quad \text{ou} \quad c\mathrm{Q} > b\beta;$$

mais, par construction,

$$c\mathrm{Q} = \mathrm{R}\,\frac{c}{ab}.$$

On aura donc un nombre de solutions $\left[\frac{c}{ab}\right] + 1$ lorsque

$$\text{(2)} \qquad R\left[\frac{c}{ab}\right] \overline{\gtrless} b\beta.$$

Donc, si l'on emploie le mode de résolution suggéré par la considération de l'échiquier, à savoir :

Diviser par a les multiples successifs de b

$$b,\ 2b,\ 3b,\ \ldots,\ (a-1)b,$$

jusqu'à ce qu'on en rencontre un qui donne pour reste

$$R\left(\frac{c}{a}\right), \quad \text{d'où} \quad b\beta = a\alpha + R\left(\frac{c}{a}\right).$$

On aura en même temps la solution minimum pour y et le nombre des solutions positives par la condition (2).

On peut montrer que, dans le cas général où

$$a = Da', \quad b = Db',$$

D étant le plus grand commun diviseur, le nombre des solutions positives est toujours donné par la formule

$$N = \left[\frac{\left[\frac{c}{b}\right] - y_1}{a'}\right] + 1,$$

où y désigne la solution minimum positive pour y.

Voici une autre application de l'échiquier :

Joignons deux sommets M et A, et supposons que la ligne MA ne rencontre aucun autre sommet dans l'intervalle. L'abscisse et l'ordonnée du point M, rapportées au point A comme origine, seront deux nombres $x = a$, $y = a'$ premiers entre eux. Prenons-les positifs tous les deux, et menons par le point M une droite perpendiculaire à MA. Elle rencontrera un sommet B tel, que les coordonnées de M par rapport à B seront

$$x = -a', \quad y = a.$$

Prolongeons les deux droites MA, MB indéfiniment. Les sommets de l'échiquier rencontrés par MA, savoir

$$A,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,$$

seront situés sur des horizontales dont les distances verticales au point M sont respectivement

$$a',\ 2a',\ 3a',\ \ldots,\ aa'.$$

De même les sommets rencontrés par MB seront à des distances verticales de M, respectivement égales à

$$a,\ 2a,\ 3a,\ \ldots,\ a'a.$$

Les nombres a et a' étant premiers entre eux, les deux côtés de l'angle droit MA, MB ne s'*appuieront* sur la même horizontale qu'à la distance aa' du point M.

Soient L, L' les sommets où MA et MB rencontrent cette horizontale commune, H le pied de la perpendiculaire abaissée du point M. On voit facilement, d'après la remarque précédente, que

$$HL = a^2, \quad HL' = a'^2;$$

donc

$$LL' = a^2 + a'^2.$$

Donc, si l'on prend pour diamètre d'un cercle la distance de deux sommets situés sur une même ligne horizontale, si le cercle passe par un autre sommet de l'échiquier, le diamètre sera décomposable en la somme de deux carrés.

Supposons que ce diamètre soit un nombre pair $2r$; l'équation du cercle

$$x^2 + y^2 = r^2$$

sera satisfaite en nombres entiers par les coordonnées du point M. D'ailleurs la perpendiculaire abaissée du centre sur MA rencontrera cette droite en un point N qui sera *nécessairement un sommet de l'échiquier*. Donc, par la remarque précédente, r sera décomposable en la somme de deux carrés. On voit que l'échiquier sert à démontrer cette propriété, à savoir que, *si un carré est égal à la somme de deux carrés, sa racine est égale à la somme de deux carrés.*

Autrement dit, toutes les solutions de

$$x^2 + y^2 = z^2$$

sont contenues dans l'identité

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + 4m^2n^2.$$

Enfin on a démontré que la perpendiculaire MH, abaissée sur le diamètre, est égale à aa'. On a donc

$$\overline{MH}^2 = HL \times HL'.$$

Cette propriété élémentaire du cercle ne dépend donc, en définitive, que du fait que le plus petit multiple de deux nombres premiers entre eux est égale à leur produit.