BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur l'intégration de l'équation $y\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 6f(x)$, f étant un polynôme du second degré

Bulletin de la S. M. F., tome 6 (1878), p. 121-124

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1878__6__121_1>

Sur l'intégration de l'équation $y\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=6f(x)$, *f étant un polynôme du second degré;* par M. Laguerre.

(Séance du 19 décembre 1877.)

1. Étant donnée l'équation du second ordre

$$y\frac{d^2y}{dx^2}-\frac{2}{3}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=6f(x), \tag{1}$$

où f désigne un polynôme du second degré en x, on sait que cette équation admet comme solutions une infinité de polynômes entiers du troisième degré, à savoir tous les polynômes du troisième degré dont le hessien est égal à $f(x)$. Je me propose dans la Note suivante de trouver son intégrale générale.

A cet effet, je remarque qu'en posant $\frac{dy}{dx}=y'$, l'équation (1) peut être remplacée par le système d'équations simultanées du premier ordre

$$(2)\qquad \frac{dx}{y^{-\frac{4}{3}}}=\frac{dy}{y^{-\frac{4}{3}}y'}=\frac{dy'}{6fy^{-\frac{7}{3}}+\frac{2}{3}y'^2y^{-\frac{7}{3}}},$$

dont le *dernier multiplicateur* est égal à l'unité, puisque l'on a

$$\frac{d}{dx}\left(y^{-\frac{4}{3}}\right)+\frac{d}{dy}\left(y^{-\frac{4}{3}}y'\right)+\frac{d}{dy'}\left(6fy^{-\frac{7}{3}}+\frac{2}{3}\,y'^2y^{-\frac{7}{3}}\right)=0.$$

Des principes établis par Jacobi, il résulte qu'il suffit, pour intégrer complétement l'équation (1), d'en trouver une intégrale du premier ordre renfermant une constante arbitraire.

Pour l'obtenir, je prends successivement les trois premières dérivées de l'équation

$$(3)\qquad yy''-\frac{2}{3}\,y'^2=6f,$$

à savoir

$$(4)\qquad yy'''-\frac{1}{3}y'y''=6f',$$

$$(5)\qquad yy^{\text{IV}}+\frac{2}{3}y'y'''-\frac{1}{3}y''^2=6f'',$$

$$yy^{\text{V}}+\frac{5}{3}y'y^{\text{IV}}=0.$$

La dernière équation s'intègre immédiatement, et donne, en désignant par α une constante arbitraire,

$$(6)\qquad y^{\text{IV}}=36\alpha y^{-\frac{5}{3}}.$$

Éliminant y^{IV}, y''' et y'' entre les équations (3), (4), (5) et (6), on obtient l'intégrale du premier ordre

$$(7)\qquad fy'^2-3f'yy'+\frac{9}{2}f''y^2+9f^2=9\alpha y^{\frac{4}{3}};$$

d'où l'on déduit, en posant

$$f=\mathrm{A}x^2+\mathrm{B}x+\mathrm{C}\quad\text{et}\quad\Delta=\mathrm{B}^2-4\mathrm{AC}=f'^2-2ff'',$$

$$(8)\qquad y'=\frac{3\left(f'y+\sqrt{\Delta y^2-4f^3+4\alpha y^{\frac{4}{3}}}\right)}{2f};$$

d'où

$$2fy' - 3f'y = 3\sqrt{\Delta y^2 - 4f^3 - 4\alpha f y^{\frac{4}{3}}}.$$

2. Je remarque maintenant que, d'après la théorie due à Jacobi, le facteur qui rend une différentielle exacte le premier membre de l'équation

$$(9) \qquad y^{-\frac{4}{3}} y' dx - y^{-\frac{4}{3}} dy = 0$$

est $\dfrac{1}{\frac{d\alpha}{dy'}}$, ou, à un facteur numérique près,

$$\frac{3y^{\frac{4}{3}}}{2fy' - 3f'y} = \frac{y^{\frac{4}{3}}}{\sqrt{\Delta y^2 - 4f^3 - 4\alpha f y^{\frac{4}{3}}}}.$$

En multipliant l'équation (9) par ce facteur intégrant et en remplaçant y' par sa valeur tirée de l'équation (8), il viendra

$$\frac{3}{2}\frac{dx}{f} + \frac{3f'y\,dx - 2f\,dy}{2f\sqrt{\Delta y^2 - 4f^3 - 4\alpha f y^{\frac{4}{3}}}} = 0.$$

Posons $y = z^{-\frac{3}{2}}$, d'où $dy = -\frac{3}{2} z^{-\frac{5}{2}} dz$; en substituant ces valeurs dans l'expression précédente, il viendra, après avoir supprimé le facteur $\frac{3}{2}$,

$$\frac{dx}{f} + \frac{f'z\,dx + f\,dz}{fz\sqrt{\Delta + 4\alpha f z - f^3 z^4}} = 0,$$

ou encore, en posant $fz = u$ et, par suite, $y = \left(\dfrac{f}{u}\right)^{\frac{3}{2}}$,

$$(10) \qquad \frac{dx}{f} + \frac{du}{u\sqrt{\Delta + 4\alpha u - u^3}} = 0.$$

L'équation (1) s'intègre donc complétement au moyen des fonctions elliptiques et cette intégrale est, en désignant par α et β deux constantes arbitraires,

$$\int \frac{dx}{f} + \int \frac{du}{u\sqrt{\Delta + 4\alpha u - u^3}} = \beta,$$

où u doit être remplacé par sa valeur $fy^{-\frac{2}{3}}$.

3. Comme je l'ai fait observer au début de cette Note, l'équation (1) admet comme solutions une infinité de polynômes entiers; en considérant l'intégrale intermédiaire (9), on voit immédiatement que, pour ces solutions, α doit être nul, et il est facile de voir, en effet, que, dans ce cas, l'équation (10) s'intègre algébriquement.

Pour l'une quelconque de ces solutions, on a ainsi

$$fy'^2 - 3f'yy' + \frac{9}{2}f''y^2 + 9f^2 = 0,$$

ou encore, en multipliant le premier membre par $4f$ et en décomposant ses premiers termes en la somme de deux carrés,

$$(2fy' - 3f'y)^2 + 9(2ff'' - 4f'^2)y^2 + 36f^3 = 0.$$

Pour employer les notations habituelles, si nous posons $f = \mathrm{H}$, $y = \mathrm{U}$ et $2fy' - 3f'y = 3\mathrm{J}$, il viendra

$$\mathrm{J}^2 - \Delta\mathrm{U}^2 + 4\mathrm{H}^3 = 0.$$

C'est la relation bien connue qui existe entre les covariants d'une forme cubique.