

BULLETIN DE LA S. M. F.

DE POLIGNAC

Sur les substitution linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 69-70

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877_5_69_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>*

Sur les substitutions linéaires; par M. DE POLIGNAC.

(Séance du 24 janvier 1877.)

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution linéaire

$$x' = \frac{bx + d}{ax + c},$$

répétée μ fois, ramène à la valeur initiale, est, d'après M. Serret (*Cours d'Algèbre supérieure*),

$$\frac{(b+c)^2}{bc-ad} = 4 \cos^2 \frac{\lambda\pi}{\mu}.$$

On peut obtenir ce résultat presque immédiatement par les considérations suivantes.

En portant sur une ligne droite les longueurs $x, x_1, x_2, \dots, x_{\mu-1}$, $x_\mu = x$, on obtient une série cyclique de points tels, que le rapport anharmonique de quatre points consécutifs est constant. On trouve sans difficulté

$$\frac{\overline{12} \cdot \overline{34}}{\overline{13} \cdot \overline{24}} = \frac{bc-ad}{(b+c)^2}.$$

D'ailleurs, d'après un théorème de M. Chasles, si les points doubles de la relation homographique

$$axx' - bx + cx' - d = 0,$$

qui lie deux points homologues (i, e consécutifs), sont imaginaires, il existe un point du plan duquel ces deux points homologues sont vus sous un angle constant. Si la série forme un cycle de μ points, cet angle sera donc égal à $\frac{\lambda\pi}{\mu}$; car les rayons vecteurs menés du point en question aux μ points de la série partageront la circonference ou la demi-circonference en μ parties égales. Enfin on a, dans ce cas,

$$\frac{\overline{12} \cdot \overline{34}}{\overline{13} \cdot \overline{24}} = \frac{\sin \theta \sin \theta}{\sin 2\theta \sin 2\theta} = \frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 2\theta} = \frac{1}{4 \cos^2 \theta} = \frac{1}{4 \cos^2 \frac{\lambda\pi}{\mu}}$$

ou

$$\frac{(b+c)^2}{bc-ad} = 4 \cos^2 \frac{\lambda\pi}{\mu}.$$
