BULLETIN DE LA S. M. F.

DE POLIGNAC

Sur les substitution linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 69-70
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__69_1>

Sur les substitutions linéaires; par M. DE POLIGNAC.

(Séance du 24 janvier 1877.)

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une substitution linéaire

$$x' = \frac{bx + d}{ax + c},$$

répétée μ fois, ramène à la valeur initiale, est, d'après M. Serret (*Cours d'Algèbre supérieure*),

$$\frac{(b+c)^2}{bc-ad} = 4\cos^2\frac{\lambda\pi}{\mu}.$$

On peut obtenir ce résultat presque immédiatement par les considérations suivantes.

En portant sur une ligne droite les longueurs $x, x_1, x_2, \ldots, x_{\mu-1}$, $x_\mu = x$, on obtient une série cyclique de points tels, que le rapport anharmonique de quatre points consécutifs est constant. On trouve sans difficulté

$$\frac{\overline{12}.\overline{34}}{\overline{13}.\overline{24}} = \frac{bc-ad}{(b+c)^2}.$$

D'ailleurs, d'après un théorème de M. Chasles, si les points doubles de la relation homographique

$$axx' - bx + cx' - d = 0,$$

qui lie deux points homologues (*i*, *e* consécutifs), sont imaginaires, il existe un point du plan duquel ces deux points homologues sont vus sous un angle constant. Si la série forme un cycle de μ points, cet angle sera donc égal à $\frac{\lambda\pi}{\mu}$; car les rayons vecteurs menés du point en question aux μ points de la série partageront la circonférence ou la demi-circonférence en μ parties égales. Enfin on a, dans ce cas,

$$\frac{\overline{12}.\overline{34}}{\overline{13}.\overline{24}} = \frac{\sin\theta\sin\theta}{\sin 2\theta\sin 2\theta} = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2 2\theta} = \frac{1}{4\cos^2\theta} = \frac{1}{4\cos^2\frac{\lambda\pi}{\mu}}$$

ou

$$\frac{(b+c)^2}{bc-ad} = 4\cos^2\frac{\lambda\pi}{\mu}.$$