BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Recherches sur les normales que l'on peut, d'un point donné mener à une conique

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 30-43

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__30_1>

Recherches sur les normales que l'on peut, d'un point donné, mener à une conique; par M. Laguerre.

(Séance du 24 janvier 1877.)

1. Je m'appuierai sur le beau théorème suivant, dû à M. Liouville [1] :

Si, aux quatre points d'intersection d'un cercle et d'une conique, on mène des normales à la conique, et si, par le centre du cercle, on mène une sécante quelconque, le centre harmonique du centre du cercle, par rapport aux quatre points où la sécante coupe les normales, est situé à l'infini.

Considérons maintenant [2] les quatre normales Ma, Mb, Mc et Md, que d'un point M on peut abaisser sur une conique donnée. Désignons par A le centre du cercle qui passe par les pieds b, c, d de trois de ces normales, déterminons le point M' symétrique du point M par rapport au centre O de la conique, et par ce point menons une parallèle Ma' à la normale Ma. Puisque $OM' = OM$,

---

(1) *Mémoire sur quelques propositions générales de Géométrie et sur la théorie de l'élimination.* (*Journal de Mathématiques*, t. VI, 1re Série, p. 403.)

(2) Le lecteur est prié de faire la figure.

il est clair que a et a' sont deux points diamétralement opposés de la conique, et, d'après une élégante proposition due à Joachimsthal, on sait que les quatre points a', b, c, d sont situés sur un même cercle.

Par suite, d'après le théorème de M. Liouville, si l'on mène par le point A une sécante quelconque, le conjugué harmonique de A par rapport aux quatre points où la sécante coupe les droites $M'a'$, Mb, Mc, Md est situé à l'infini.

Considérons, en particulier, la sécante $A\mu$ parallèle à $M'a'$ et par conséquent à Ma, le point de rencontre avec $M'a'$ étant rejeté à l'infini, on en déduit immédiatement que Ma est la conjuguée harmonique de MA relativement au faisceau des normales Mb, Mc, Md.

Supposons maintenant que la sécante passe par le point M, on aura

$$\frac{1}{A\alpha} + \frac{3}{AM} =$$

d'où il suit

$$\alpha A = \frac{AM}{3}.$$

Menons par le point A une parallèle à Ma, et soit μ le point où cette parallèle coupe le diamètre OM; le point μ décrira le segment MM' dans le rapport de 3 à 1. On voit donc qu'il est situé sur le prolongement du rayon MO et à une distance du centre égale à la moitié de ce rayon; ce point sera d'ailleurs le même, quelle que soit celle des quatre normales que l'on considère.

On peut donc énoncer les deux propositions suivantes :

Théorème I. — *Si l'on considère trois des normales que l'on peut mener d'un point* M *à une conique, la droite qui joint le point* M *au centre du cercle circonscrit aux trois pieds de ces normales a pour conjuguée harmonique, relativement à ces trois normales, la quatrième normale que l'on peut mener du point* M *à la courbe.*

Théorème II. — *Si l'on désigne par* a, b, c, d *les pieds des quatre normales que l'on peut mener d'un point* M *à une conique, et par* A, B, C, D *les centres des cercles circonscrits aux triangles* bcd, cda, dab *et* abc, *les droites menées respectivement par ces* *points, parallèlement aux normales* Ma, Mb, Mc *et* Md, *se coupent en un même point* μ.

Ce point est situé sur la droite qui joint le point M *au centre de la conique, de l'autre côté de ce centre et à une distance moitié moindre.*

2. Il résulte de là que, si l'on considère l'une quelconque des normales Ma que l'on peut mener par le point M, la droite MA, qui joint ce point au centre du cercle circonscrit au triangle bcd, est l'*une* des deux droites qui constituent la polaire conique de Ma relativement au faisceau Mb, Mc, Md.

Par suite, si l'on détermine pour chacune des normales sa polaire conique par rapport aux trois autres, on obtiendra huit droites sur lesquelles se trouveront les quatre centres A, B, C et D des cercles circonscrits.

Soit

$$U = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dx^3 + ey^4 = 0$$

une équation du quatrième degré dont les racines déterminent les directions des quatre normales issues du point M, et α une racine de cette équation déterminant une des normales. Les directions des trois autres seront données par l'équation

$$\frac{U}{x - \alpha y} = ax^3 + (4b + a\alpha)x^2y + \ldots = 0,$$

et la polaire conique de la première normale, par rapport aux trois autres, par l'équation

$$\alpha[3ax^2 + 2(4b + a\alpha)xy + \ldots] + [(4b + a\alpha)x^2 + \ldots] = 0.$$

Pour obtenir l'équation déterminant les huit droites dont j'ai parlé plus haut, il faut éliminer α entre cette relation et la relation $U(\alpha, 1) = 0$; comme, d'ailleurs, le résultat doit être un covariant de U, nous n'avons besoin que de calculer le terme du degré plus élevé. Nous ferons donc $y = 0$, et il restera à éliminer α entre les équations $a\alpha + b = 0$ et $U(\alpha, 1) = 0$; le résultant, multiplié par x^8, devient

$$\begin{aligned} &x^8(-3b^4 + 6cab^2 - 4da^2b + ea^3) \\ &\quad = (ae - 4bd + 3c^2)a^2x^8 - 3(ac - b^2)^2x^8. \end{aligned}$$

Si donc on désigne par H le hessien de U, et par S son invariant quadratique, l'équation qui détermine les huit droites est

$$SU^2 - 3H^2 = o.$$

Cette équation se décompose en deux autres

$$H + \sqrt{\frac{S}{3}}U = o \quad \text{et} \quad H - \sqrt{\frac{S}{3}}U = o.$$

Comme je le montrerai plus loin, le faisceau des quatre droites MA, MB, MC et MD est déterminé par l'une de ces équations.

3. Théorème III. — *Si l'on joint le point* M *au centre* O *de la conique, et si, par le même point, on mène des parallèles* MX *et* MY *aux axes de cette conique, les trois droites ainsi obtenues jouissent de la propriété suivante :*

La conjuguée harmonique de chacune d'elles, par rapport au faisceau des normales issu du point M, *se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux deux autres droites.*

La vérification de ce théorème se fait très-simplement en remarquant que, si l'on rapporte la conique à ses axes, l'équation qui donne les coefficients angulaires de normales issues du point (ξ, η) est

$$b^2\xi^2 m^4 - 2b^2\eta\xi m^3 + (b^2\eta^2 + a^2\xi^2 - c^4)m^2 - 2a^2\eta\xi m + a^2\eta^2 = o.$$

4. Soit, comme précédemment, $U = o$ l'équation qui détermine les directions des quatre normales issues du point M; pour abréger, je dirai simplement que c'est l'équation de ces normales, et je me servirai d'une expression semblable pour les autres systèmes de droites que j'aurai à considérer. Soit, de plus,

$$u = \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$$

l'équation de deux quelconques des trois droites MO, MX et MY. Le théorème précédent montre qu'un certain invariant des formes u et U doit être nul; pour calculer cet invariant, je supposerai la forme U réduite à sa forme canonique, en posant $\alpha = \gamma = o$, et les deux droites auront simplement pour équation $xy = o$; soit, de plus, $x\eta - y\xi = o$ l'équation de la troisième droite.

Les conjuguées harmoniques de $x = 0$, relativement à $U = 0$ et $y(x\eta - y\xi) = 0$, sont respectivement

$$dx + ey \quad \text{et} \quad x\eta - 2y\xi;$$

d'après le théorème précédent, on a donc

$$2d\xi + e\eta = 0.$$

De même, les conjuguées harmoniques de $y = 0$, relativement à $U = 0$ et $x(x\eta - y\xi) = 0$, sont respectivement

$$ax + by \quad \text{et} \quad 2x\eta - y\xi;$$

on a donc également

$$a\xi + 2b\eta = 0.$$

Éliminant ξ et η entre les relations précédentes, il vient

$$ae - 4bd = 0.$$

Écrivons maintenant la relation suivante :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 16(\alpha\gamma - \beta^2)^2(ae - 4bd + 3c^2) \\ \quad - 3(a\gamma^2 + 4c\beta^2 + e\alpha^2 - 4b\beta\gamma + 2c\gamma\alpha - 4d\alpha\beta)^2 = 0, \end{array} \right.$$

où, comme on le voit, le premier membre ne renferme que des invariants de U et de u (¹). D'ailleurs, quand on y fait $\alpha = \gamma = 0$, cette relation se réduit à la relation $ae - 4bd = 0$, que nous venons de trouver. On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si l'on designe respectivement par $u = 0$ *et* $U = 0$ *les équations des quatre normales issues du point* M *et de deux quelconques des droites* OM, OX *et* OY, *les invariants des formes* u *et* U *sont reliés par la relation* (1).

5. Désignons par $\dfrac{\xi}{\eta}$ et $\dfrac{x}{y}$ les paramètres qui fixent les directions de deux quelconques des droites OM, OX et OY; on pourra poser évidemment

$$\frac{\alpha}{y\eta} = \frac{-2\beta}{y\xi + x\eta} = \frac{\gamma}{x\xi},$$

(¹) *Voir* Salmon, *Higher Algebra*, 3ᵉ édition, p. 200.

et, en portant ces valeurs dans l'équation (1), on obtiendra la relation suivante :

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\xi^2(ax^2+2bxy+cy^2)+2\xi\eta(bx^2+2cxy+dy^2)\\
&\qquad +\eta^2(cx^2+2dxy+ey^2)\pm\sqrt{\frac{S}{3}}(x\eta-y\xi)^2=0.
\end{aligned}
\right.
$$

Cette équation déterminera, quand on se donnera la direction $\frac{\xi}{\eta}$ de l'une des trois droites, les directions des deux autres.

6. Je me proposerai maintenant le problème suivant :

Déterminer les coniques qui coupent orthogonalement quatre droites données passant par un même point M.

Je ferai abstraction des cercles ayant pour centre le point M et qui satisfont évidemment au problème; il y a encore une infinité de solutions, et l'on pourra préciser la question en assujettissant, par exemple, les coniques à passer par un point fixe pris sur l'une des droites.

Je désignerai, comme ci-dessus, par $U=0$ l'équation des quatre droites données. Cela posé, pour déterminer les droites qui joignent le point M aux centres des coniques qui sont des solutions du problème, il suffira d'exprimer que les racines de l'équation (2) en (ξ, η) correspondent à deux directions rectangulaires.

Soit

$$u=\alpha x^2+2\beta xy+\gamma y^2=0$$

l'équation des deux droites isotropes passant par le point M. En posant, pour abréger,

$$(c\alpha-2b\beta+a\gamma)x^2+2(d\alpha-2c\beta+b\gamma)xy+(e\alpha-2d\beta+c\gamma)y^2=w,$$

on obtiendra l'équation suivante :

$$(3)\qquad w\pm\sqrt{\frac{S}{3}}u=0.$$

Le lieu des centres des coniques cherchées se compose donc de quatre droites que l'on peut déterminer par l'extraction de simples racines carrées.

L'une de ces droites étant déterminée, on prendra arbitrairement un de ses points que l'on regardera comme le centre d'une conique normale aux quatre droites données. L'équation (2) déterminera les directions des axes de cette conique, et il sera facile de trouver la longueur de ses axes.

7. Comme je l'ai montré (n° 2), les quatre droites, qui joignent le point M aux centres A, B, C et D des cercles qui sont circonscrits aux triangles que l'on peut former avec les pieds des normales, sont déterminées par quatre des racines de l'équation

$$\left(\mathrm{H}+\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\mathrm{U}\right)\left(\mathrm{H}-\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\mathrm{U}\right)=0.$$

De ce que je viens de dire plus haut, il résulte que, le polynôme U étant donné, on peut, en extrayant de simples racines carrées, déterminer toutes les coniques normales aux quatre droites, et par suite déterminer le faisceau MA, MB, MC et MD. Ce faisceau doit par suite, comme je l'avais énoncé, avoir pour équation

$$\mathrm{H}+\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\mathrm{U}=0 \quad \text{ou} \quad \mathrm{H}-\sqrt{\frac{\mathrm{S}}{3}}\mathrm{U}=0;$$

autrement ces deux équations seraient résolubles par l'adjonction de simples racines carrées, ce que l'on sait être généralement impossible.

8. *Étant données quatre droites passant par un même point et déterminées par l'équation $u=0$, il est clair qu'il y existe une infinité de systèmes de trois droites jouissant de la propriété que la conjuguée harmonique de chacune d'elles relativement aux deux autres se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux quatre droites données.*

En désignant par $\frac{\xi}{\eta}$ le paramètre d'une droite arbitrairement choisie, les racines de l'équation (2) détermineront deux autres droites, formant avec la première un système jouissant de la propriété énoncée.

Coupons les quatre droites données par une conique K passant par leur point de rencontre et choisie du reste arbitrairement; soient α, β, γ et δ les points où ces droites rencontrent la conique ; un quelconque des systèmes de trois droites, jouissant de la propriété énoncée, rencontrera la conique en trois points p, q et r ; ces trois points formeront les sommets d'un triangle inscrit dans K, et il est clair que ce triangle sera déterminé dès que l'on connaîtra un de ses sommets. On en conclut immédiatement que tous ces triangles enveloppent une conique K′.

Considérons les quatre tangentes communes que l'on peut mener à K et à K′ et le point où l'une de ces tangentes touche K ; si l'on prend ce point comme sommet d'un triangle inscrit dans K et circonscrit à K′, on voit facilement que deux des sommets de ce triangle seront confondus au point de contact.

Or en faisant, dans l'équation (2), $x = \xi$ et $y = \eta$, on obtient l'équation $u = 0$; donc les tangentes menées aux points α, β, γ et δ à la conique K sont tangentes à K′.

Tous les triangles satisfaisant à la question s'obtiendront donc en construisant les deux coniques touchant les tangentes menées en α, β, γ et δ à K, et jouissant de la propriété qu'à chacune d'elles on puisse circonscrire un triangle inscrit dans K ; on sait alors qu'on pourra en inscrire une infinité et tous ces triangles satisferont au problème proposé.

9. De là résulte la détermination suivante des coniques coupant orthogonalement quatre droites données passant par un même point M.

Par M faisons passer un cercle quelconque K rencontrant les droites données aux points α, β, γ et δ et menons en ces points les tangentes au cercle.

Nous pouvons déterminer deux coniques différentes tangentes à ces quatre droites et jouissant de la propriété qu'à chacune d'elles on puisse circonscrire un triangle inscrit dans K.

Soit K′ l'une de ces coniques ; sans qu'il soit besoin de la tracer, on pourra la supposer déterminée, par exemple, par une cinquième tangente. Par le centre du cercle menons une tangente à K′ ; soient p et q les points où cette tangente coupe le cercle et construisons le troisième sommet r d'un triangle inscrit dans le cercle et circonscrit à K′.

Cela posé, *si par le point r on mène deux droites rX et rY parallèles à Mp et Mq, on pourra construire une conique ayant* *pour axes* rX *et* rY *et coupant orthogonalement les quatre droites issues du point* M.

On obtiendra ainsi, par la règle et le compas, les quatre solutions du problème.

Note A.

SUR LA DÉTERMINATION D'UNE CONIQUE, CONNAISSANT SES AXES ET DEUX DROITES QUI LUI SONT NORMALES.

Soient OX et OY les axes de la conique; Ma et Mb les deux droites données; je me propose de déterminer les points α et β où les deux droites sont respectivement normales à la conique cherchée; il sera alors facile de la déterminer complétement.

Soit i le milieu du segment $\alpha\beta$: j'ai démontré que *la droite* Δ *menée par* i *perpendiculairement à* $\alpha\beta$ *passe par les milieux des segments interceptés sur les axes par les deux normales* Ma *et* Mb. Connaissant ces deux normales, on construira facilement la droite Δ et il suffira de déterminer sur cette droite un point i, tel que la perpendiculaire, menée en ce point à Δ, rencontrât les droites Ma et Mb en deux points équidistants du point i.

La construction à laquelle on est ainsi conduit serait souvent défectueuse dans la pratique; la suivante sera peut-être préférable.

La proposition que j'ai rappelée plus haut peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Étant données deux droites normales à une conique aux points α *et* β, *ces deux normales, la droite menée par le point milieu* i *de la corde* $\alpha\beta$ *et perpendiculairement à cette corde, la corde* $\alpha\beta$ *et les deux axes de la conique forment un ensemble de six droites tangentes à une même parabole, dont la directrice est la droite* Oi.

Pour obtenir le point i, il suffira donc, d'après une propriété bien connue, de construire le point de rencontre P des hauteurs du triangle formé par les deux normales données et l'un des axes; le point i sera alors déterminé par le point de rencontre de Δ et de la droite qui joint le point P au centre de la conique.

Le point i étant déterminé, en menant par ce point une perpendiculaire à Δ, on obtiendra les pieds des normales α et β.

Si l'on suppose que les normales Ma et Mb se confondent, on retrouve alors une élégante construction du centre de courbure d'une conique donnée par M. Mannheim.

Note B.

SUR QUELQUES PROPRIÉTÉS DES NORMALES AUX COURBES ET AUX SURFACES DU SECOND ORDRE.

1. J'ai démontré plus haut la propriété suivante des normales que l'on peut mener d'un point à une conique :

Si l'on joint un point quelconque M *au centre d'une conique et si l'on mène par ce point des parallèles aux axes de cette conique, les trois droites ainsi obtenues jouissent de la propriété que la conjuguée harmonique de chacune d'elles, relativement aux deux autres, se confond avec la conjuguée harmonique relativement aux quatre normales que l'on peut mener du point* M *à la conique.*

Cette propriété étant évidemment projective, on en déduit immédiatement la proprosition suivante :

Étant donnés un point M *et l'hyperbole équilatère qui passe par les pieds a, b, c, d des quatre normales que l'on peut mener du point* M *à une conique, si l'on joint un point quelconque de l'hyperbole aux quatre points a, b, c et d, on obtient quatre droites normales à une conique ayant mêmes axes que la conique donnée.*

En particulier, les points a, b, c, d sont sur l'hyperbole, et, si l'on considère trois quelconques de ces points, en vertu d'un théorème bien connu, le point de rencontre des hauteurs du triangle formé par ces trois points se trouve également sur cette courbe. D'où les conséquences suivantes :

Étant donnés sur une conique quatre points tels que les normales en ces points soient concourantes, si l'on joint un quelconque de ces points aux trois autres, les trois droites ainsi obtenues sont normales à une conique ayant mêmes axes que la conique donnée.

Les trois hauteurs d'un quelconque des triangles, que l'on peut former avec trois de ces points, sont également normales à une conique ayant mêmes axes que la conique donnée.

2. Considérons maintenant une surface du second ordre dont l'équation, en coordonnées rectangulaires, soit

$$\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}=1; \tag{1}$$

pour déterminer les pieds des normales à cette courbe qui passent par le point (α, β, γ), nous adjoindrons à l'équation (1) les équations

$$\frac{x-\alpha}{\frac{x}{a}}=\frac{y-\beta}{\frac{y}{b}}=\frac{z-\gamma}{\frac{z}{c}},$$

ou, en désignant par ξ une quantité indéterminée,

$$x=\frac{a\alpha}{a-\xi},\quad y=\frac{b\beta}{b-\xi},\quad z=\frac{c\gamma}{c-\xi};$$

en donnant à ξ toutes les valeurs possibles, les formules précédentes déterminent les divers points d'une cubique gauche K passant par les six pieds des normales, les paramètres de ces points étant d'ailleurs donnés par les racines de l'équation

$$\frac{a\alpha^2}{(\xi-a)^2}+\frac{b\beta^2}{(\xi-b)^2}+\frac{c\gamma^2}{(\xi-c)^2}=1,$$

ou, sous forme entière et en introduisant pour l'homogénéité une quantité η égale à l'unité,

$$\begin{aligned}U=(\xi-a\eta)^2(\xi-b\eta)^2(\xi-c\eta)^2-a\alpha^2\eta^2(\xi-b\eta)^2(\xi-c\eta)^2\\ -b\beta^2\eta^2(\xi-c\eta)^2(\xi-a\eta)^2-c\gamma^2\eta^2(\xi-a\eta)^2(\xi-b\eta)^2=0.\end{aligned}$$

Le centre de la surface et les trois points à l'infini sur les axes sont également situés sur K et leurs paramètres sont respectivement ∞, a, b et c : ce sont les racines de l'équation

$$W=\eta(\xi-a\eta)(\xi-b\eta)(\xi-c\eta)=0.$$

Je vais établir maintenant que le conjugué harmonique de l'un quelconque des quatre points déterminés par l'équation $W=0$, relativement aux trois autres, se confond avec son conjugué harmonique relativement aux six pieds des normales.

Considérons, par exemple, le point A dont le paramètre est a;

en posant, pour abréger,

$$V = \eta(\xi - b\eta)(\xi - c\eta),$$

le conjugué harmonique de A relativement aux points (∞, b, c) sera déterminé par l'équation

$$(2) \qquad \xi'\left(\frac{dV}{d\xi}\right) + \eta'\left(\frac{dV}{d\eta}\right) = 0,$$

la lettre ξ ayant été remplacée par la lettre a dans les dérivées partielles.

D'autre part, le conjugué harmonique du point A, relativement aux pieds des six normales, sera déterminé par l'équation

$$\xi'\left(\frac{dU}{d\xi}\right) + \eta'\left(\frac{dU}{d\eta}\right) = 0,$$

où, dans les dérivées partielles, on doit également faire $\xi = a$. Il est clair, dans cette hypothèse, que l'on peut supprimer dans U tous les termes qui renferment ($\xi - a\eta$) au carré et remplacer U par V^2; l'équation précédente devient alors

$$V\left[\xi'\left(\frac{dV}{d\xi}\right) + \eta'\left(\frac{dV}{d\eta}\right)\right] = 0,$$

et, en la comparant à l'équation (2), on en déduit la proposition que je voulais démontrer.

3. Cette proposition peut encore s'énoncer de la façon suivante :

Par un point M de l'espace, menons des parallèles aux trois axes d'une surface du second ordre, puis joignons ce point au centre de la surface, nous obtiendrons ainsi quatre droites (D) : ces droites et les normales que, du point M, on peut mener à la surface seront situées sur un même cône du second ordre.

Cela posé :

La conjuguée harmonique de l'une quelconque des droites (D), *relativement aux trois autres, se confond avec sa conjuguée harmonique relativement aux six normales.*

Note C.

SUR UN INVARIANT DE DEUX FORMES CUBIQUES QUI SE PRÉSENTE DANS LA THÉORIE DES NORMALES A UNE CONIQUE.

1. En général, trois droites passant par un même point ne sont pas normales à une conique ayant pour axes deux droites données.

Soit

$$u = ax^3 + 3bx^2y + 3cxy^2 + dy^3 = 0$$

une équation du troisième degré déterminant les directions des axes et de la droite qui joint un point donné M au point d'intersection des axes ; soit de plus

$$u' = a'x^3 + 3b'x^2y + 3c'xy^2 + d'y^3 = 0$$

une équation déterminant les directions des trois droites passant par le point M. La condition nécessaire et suffisante pour que ces trois droites soient normales à une conique ayant pour axes les droites données est

$$\begin{aligned}\Delta = 2(ad' - 3bc' + 3cb' - da')^2 + 9[(ad - bc)(a'd' - b'c')\\ - 2(ac - b^2)(b'd' - c'^2) - 2(bd - c^2)(a'c' - b'^2)] = 0.\end{aligned}$$

2. L'invariant Δ des deux formes cubiques u et u', qui, on le remarquera, est un *combinant*, se présente dans plusieurs autres questions de Géométrie.

Soient, sur une conique, deux systèmes de trois points a, b, c et a', b', c', déterminés respectivement par les racines des équations $u = 0$ et $u' = 0$.

1° *Si l'on considère les sommets du triangle formé par les tangentes en a', b', c' à la conique donnée, la condition nécessaire et suffisante pour que ces trois points et les points a, b, c soient sur une même conique est $\Delta = 0$.*

2° *La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse par les trois points a, b, c faire passer une conique, pour laquelle a', b', c' soit un triangle autopolaire, est encore $\Delta = 0$.*

3. Soient, sur une cubique gauche, deux systèmes de trois points

a, b, c et a', b', c', déterminés respectivement par les racines de deux équations $u = 0$ et $u' = 0$.

1° *La condition nécessaire et suffisante pour que le plan des trois points a', b', c' rencontre, en trois points en ligne droite, les tangentes menées en a, b et c à la cubique, est* $\Delta = 0$.

2° *Si l'on a la relation* $\Delta = 0$, *les traces, sur un plan osculateur quelconque, des tangentes menées à la cubique en a, b et c et des côtés du triangle a', b', c', sont situées sur une même conique.*

4. De l'expression de l'invariant Δ se déduit immédiatement la proposition suivante :

Étant données une cubique gauche K *et deux tangentes quelconques à cette cubique, ces droites et la courbe déterminent une surface du second ordre* S; *soit* D *l'intersection des plans osculateurs à* K *aux points de contact des deux tangentes.*

Si, par D, *on mène un plan sécant quelconque* P, *les tangentes à* K, *aux points où cette courbe rencontre le plan, déterminent une surface du second ordre circonscrite à* S *le long d'une conique située dans le plan* P.