BULLETIN DE LA S. M. F.

A. MANNHEIM

Sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 163-166
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__163_1>

Sur les surfaces dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre; par M. A. Mannheim.

(Séance du 25 juillet 1877.)

Dans une Communication que j'ai faite récemment sur ce sujet à l'Académie des Sciences ([1]), je n'ai pu, faute de place, donner une démonstration géométrique d'un théorème établi analytiquement par M. Halphen ([2]). Voici cette démonstration :

Soient a un point d'une surface (S_R), dont les rayons de courbure principaux sont liés entre eux, A la normale en ce point et b et c les centres de courbure situés sur cette normale. Appelons (B) et (C) les nappes de la développée de (S_R) et B et C les normales à ces surfaces issues des points b et c. Prenons pour plan de la figure le plan de la section principale de (S_R) en a pour laquelle le rayon de courbure ac ou R_1 est maximum. L'une des lignes de courbure

([1]) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 30 avril 1877.
([2]) Voir ce *Bulletin* pour 1876.

de (S_R) est tangente en a à ce plan. La normalie à (S_R), qui a pour directrice cette courbe, est une surface développable dont l'arête de rebroussement est tangente en c à A. Cette surface développable est circonscrite à (B) le long d'une courbe dont la tangente en b est l'axe de courbure de l'autre ligne de courbure qui passe en a. Cet axe, comme je l'ai montré [1], rencontre C en i, qui est le centre de courbure pour le point c de la courbe de contour apparent de (C), projetée orthogonalement sur le plan mené en c perpendiculairement à A.

Lorsque a se déplace sur la ligne de courbure tangente au plan de la figure, la normale A se déplace sur ce plan d'un angle $d\psi$ et le rayon de courbure ac ou R_1 varie.

On a, en appelant ε le centre de courbure de la section faite dans (C) par le plan de la figure,

$$dR_1 = c\varepsilon\, d\psi.$$

Le rayon de courbure ab ou R_2 varie en même temps; en menant bj perpendiculairement à la tangente bi, on a

$$dR_2 = cj\, d\psi;$$

on a alors

$$\frac{dR_1}{dR_2} = \frac{c\varepsilon}{cj}.$$

Mais $cj = -\dfrac{bc^2}{ci}$ (en mettant le signe — parce que les segments ci et cj sont nécessairement de part et d'autre du point c); il vient

$$\frac{dR_1}{dR_2} = -\frac{c\varepsilon \times ci}{bc^2},$$

et comme le produit $c\varepsilon \times ci$ est égal au produit $t_1 t_2$ des rayons de courbure principaux de (C) en c, on arrive à

$$(1) \qquad \frac{dR_1}{dR_2} = -\frac{t_1 t_2}{(R_1 - R_2)^2}.$$

Déplaçons maintenant la normale A en faisant suivre au point a un élément de la ligne de courbure perpendiculaire au plan de la

(1) Voir *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 7 décembre 1874.

figure et de façon que la variation de ab soit dR_2. Alors, puisque R_1 et R_2 sont liés entre eux, l'autre rayon de courbure variera de dR_1, et l'on trouvera comme précédemment

$$\frac{dR_2}{dR_1} = -\frac{r_1 r_2}{(R_1 - R_2)^2}. \tag{2}$$

En faisant le produit de ces deux égalités, il vient

$$r_1 r_2 t_1 t_2 = (R_1 - R_2)^4.$$

De là le théorème qu'il s'agissait d'établir :

Pour une surface (S_R), *le produit des rayons de courbure principaux des nappes* (B) *et* (C) *aux points b et c est égal à* $(R_1 - R_2)^4$.

Des relations (1) et (2) nous pouvons déduire quelques conséquences. Si, par exemple, on considère les surfaces pour lesquelles $R_1 - R_2 =$ const., on a

$$dR_1 = dR_2,$$

et par suite

$$r_1 r_2 = t_1 t_2 = -(R_1 - R_2)^2.$$

On peut donc dire :

Lorsque $R_1 - R_2 =$ const., *les nappes* (B) *et* (C) *sont à courbures opposées ; le produit des rayons de courbure principaux de* (B) *est égal au produit des rayons de courbure principaux de* (C) *et égal à* $-(R_1 - R_2)^2$.

De la même manière, on trouvera que :

Lorsque $\frac{R_1}{R_2} =$ const., *le produit des rayons de courbure principaux de* (B) *en b est proportionnel au produit analogue pour* (C) *et au produit analogue pour* (S_R) *en a.*

A ces théorèmes j'ajouterai les suivants, qui résultent facilement des théorèmes démontrés dans la Note à l'Académie dont je viens de parler :

Lorsque $R_1 - R_2 =$ const., *les normalies qui touchent* (B) *et* (C) *suivant des asymptotiques ont pour plans centraux les plans bissecteurs des dièdres formés par les plans des sections principales. Ces* *normalies ont pour lignes de striction des courbes lieux des points milieux des segments tels que bc, et leur paramètre de distribution est constant et égal à* $\frac{R_1 - R_2}{2}$. *Les asymptotiques des nappes* (B) *et* (C) *ont même rayon de seconde courbure.*

Lorsqu'une surface convexe (S_R) *a ses indicatrices semblables entre elles, les normalies qui touchent* (B) *et* (C) *suivant des asymptotiques ont pour directrices des courbes qui coupent sous le même angle les lignes de courbure d'un même système de* (S_R). *Les lignes de striction de ces normalies partagent dans un rapport constant les segments tels que bc.*