

BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Proposition d'algèbre

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 160-163

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877_5_160_1

© Bulletin de la S. M. F., 1877, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/*

Sur une proposition d'Algèbre; par M. HALPHEN.

(Séance du 13 juin 1877.)

Si l'on désigne par les lettres f, φ, ψ trois polynômes entiers à deux variables x, y , quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on ait identiquement

$$(1) \quad f = A\varphi + B\psi,$$

A et B étant aussi des polynômes entiers en x, y ?

La réponse à cette question est des plus aisées dans le cas où chacun des systèmes de solutions des équations $\varphi = 0, \psi = 0$ est simple. *Dans ce cas, il faut et il suffit que chacun de ces systèmes annule f .* J'admettrai ici ce résultat comme connu. Dans les autres cas, la question est plus difficile à résoudre. Cette difficulté a été surmontée par M. Nöther. On peut énoncer comme il suit la solution donnée par ce savant géomètre (*Math. Ann.*, t. VI) :

Soit (α, β) un système de solutions des équations $\varphi = 0, \psi = 0$; soient a, b deux développements procédant suivant les puissances entières, positives et ascendantes de $(x - \alpha)$ et $(y - \beta)$. Pour que f soit de la forme (1), il faut et il suffit qu'on puisse déterminer a et b par la condition

$$(2) \quad f = a\varphi + b\psi,$$

et qu'il en soit de même pour chaque système de solutions des équations considérées.

Cette proposition étant très-importante, je crois utile d'en donner ici une nouvelle démonstration.

Je suppose, en premier lieu, $\varphi = x$. Je groupe, dans f , ψ et B , les termes indépendants de x , et j'écris

$$f = xf' + F(y), \quad \psi = x\psi' + \Psi(y), \quad B = xB' + \mathfrak{B}(y).$$

En faisant le même groupement dans (1), et retenant seulement les termes indépendants de x , on obtient

$$(3) \quad F(y) = \mathfrak{B}(y) \Psi(y),$$

c'est-à-dire, pour l'exactitude de l'équation (1), en supposant $\varphi = x$, il est nécessaire que la partie indépendante de x dans f soit divisible par la partie indépendante de x dans ψ .

Cette condition est suffisante, comme on le voit immédiatement.

Soit β une racine de $\Psi(y)$. Je suppose la condition (2) remplie pour le système (α, β) . Par le même raisonnement, j'en conclus

$$F(y) = b_1(y) \Psi(y),$$

b_1 étant une série convergente dans le voisinage de $y = \beta$. J'en conclus que F contient le facteur $(y - \beta)$ au moins à la même puissance que Ψ .

Si maintenant il en est de même pour chaque racine de Ψ , il en résulte que F est divisible par Ψ . Donc la proposition annoncée est prouvée pour le cas où l'on a $\varphi = x$. Au moyen d'une substitution linéaire, j'en conclus que la proposition est prouvée aussi pour le cas où φ est un trinôme du premier degré en x, y .

J'arrive maintenant au cas général. Supposons, pour un instant, les coefficients de φ variables, et faisons-les varier de telle sorte que le système de solutions (α, β) multiple d'ordre n se change en n systèmes différents $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots$. Soient P_1, P_2, \dots des trinômes du premier degré assujettis simplement aux conditions de s'évanouir, P_1 pour $x = \alpha_1, y = \beta_1$; P_2 pour $x = \alpha_2, y = \beta_2, \dots$

En même temps, un second système de solutions (α', β') multiple d'ordre n' se change en n' systèmes différents. Soient, de même, P'_1, P'_2, \dots des trinômes assujettis à des conditions analogues; et ainsi de suite.

Soient Π le produit de tous ces trinômes et φ' le polynôme φ dont

on a fait varier les coefficients. Toutes les solutions communes à $\varphi' = 0$ et $\psi = 0$ étant simples, j'ai

$$\Pi = A' \varphi' + B' \psi',$$

A' et B' étant des polynômes entiers. Cette relation subsiste à la limite, lorsque $\varphi' = \varphi$. Alors P_1, P_2, \dots s'évanouissent pour $x = \alpha$, $y = \beta$, et ainsi des autres.

De là cette proposition préparatoire :

Si P_1, P_2, \dots sont des trinômes du premier degré en x, y , assujettis simplement à s'évanouir pour $x = \alpha, y = \beta$; si P'_1, P'_2, \dots sont, de même, des trinômes assujettis à s'évanouir pour $x = \alpha', y = \beta'$; et de même pour chaque solution commune à $\varphi = 0, \psi = 0$, on peut choisir le nombre de ces trinômes de manière à avoir identiquement, en désignant par Π leur produit, et quel que soit le polynôme entier f ,

$$(4) \quad \Pi f = C \varphi + D \psi,$$

C et D étant aussi des polynômes entiers.

Je suppose maintenant la condition (2) remplie aux environs de (α, β) . Il résulte alors de (4), et dans les mêmes limites,

$$(a\Pi - C)\varphi + (b\Pi - D)\psi = 0,$$

et par suite

$$(5) \quad C = a\Pi + c\psi,$$

c désignant un développement analogue à a .

Je considère séparément dans Π le facteur P_1 . Les solutions communes à $P_1 = 0$ et $\psi = 0$ autres que (α, β) sont toutes simples et ne font pas évanouir φ . Elles font donc évanouir C , d'après (4). En ce qui concerne la solution (α, β) , l'équation (5) peut être envisagée comme exprimant que la condition (2) est remplie à l'égard de P_1, ψ, C , jouant le rôle de φ, ψ, f . D'ailleurs P_1 est un trinôme du premier degré. Donc, d'après un résultat précédent,

$$(6) \quad C = C_1 P_1 + B \psi,$$

C_1 et B désignant des polynômes entiers.

La valeur (6) de C_1 , portée dans (4), conduit à

$$\Pi f = C_1 P_1 \varphi + (D + B\varphi)\psi.$$

Comme Π contient le facteur P_1 , le coefficient de Ψ , donc cette dernière identité, contient aussi ce facteur. Je le supprime, et je désigne par Π_1 le produit des autres trinômes. J'ai alors

(7)
$$\Pi_1 f = C_1 \varphi + D_1 \psi.$$

Je répète sur (7) et à l'égard de P_2 le même raisonnement, et ainsi de suite. Je fais ainsi disparaître du coefficient de f dans (4) tous les trinômes relatifs à la solution (α, β) .

Si maintenant les conditions analogues à (2) sont satisfaites par f pour toutes les solutions communes à $\varphi = 0$ et $\psi = 0$, on fera de même disparaître tous les trinômes P', P'', \dots . Donc f est de la forme (1). C'est ce qu'il fallait démontrer.
