BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Sur une formule récurrente concernant les sommes des diviseurs des nombres entiers

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 158-160

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__158_1>

Sur une formule récurrente concernant les sommes des diviseurs des nombres entiers; par M. Halphen.

(Séance du 30 mai 1877.)

Les sommes des diviseurs des nombres naturels peuvent se calculer de proche en proche au moyen d'une formule récurrente due à Euler. L'illustre géomètre attachait le plus grand prix à la découverte de cette formule, et ne parvint à la démontrer qu'après de longs efforts [1]. Voici cette formule :

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} S(n) = {} & S(n-1) - S(n-5) + S(n-12) + \ldots \\ & + (-1)^x S\left[n - \frac{x(3x-1)}{2}\right] + \ldots \\ & + S(n-2) - S(n-7) + S(n-15) + \ldots \\ & + (-1)^x S\left[n - \frac{x(3x+1)}{2}\right] + \ldots . \end{aligned}\right.$$

(1) Euler a publié sur ce sujet trois Notes, savoir : 1° *Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres, par rapport à la somme de leurs diviseurs;* — 2° *Observatio de summis divisorum;* — 3° *Demonstratio theorematis circa ordinem in summis divisorum observatum.* — Ces trois Notes datent des années 1747, 1752, 1754 (Acad. de Berlin et de Saint-Pétersbourg). On les trouve réunis dans le Recueil *Leonhardi Euleri Commentationes Arithmeticæ collectæ*, p. 234 et 146 du tome I et p. 639 du tome II.

La notation $S(a)$ y désigne la somme des diviseurs du nombre a. Chacune des deux suites doit être prolongée jusqu'au dernier terme dans la parenthèse duquel figure un nombre positif. Enfin, dans le cas où n est de l'une des deux formes $\frac{x(3x\pm 1)}{2}$, on doit remplacer $S(0)$ par n.

Euler a découvert cette formule et l'a démontrée au moyen du résultat suivant :

$$(2)\quad P=(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)=\ldots=\sum_{x=-\infty}^{x=+\infty}(-1)^x z^{\frac{x(3x+1)}{2}}$$

Le cube du même produit de facteurs se développe suivant une formule analogue à (2) et qui a été trouvée par Jacobi (*Fund. nova*, § 66, et *Journal de Crelle*, t. 21, p. 13), savoir

$$(3)\qquad P^3=\sum_{x=0}^{x=\infty}(-1)^x(2x+1)z^{\frac{x(x+1)}{2}}$$

Il suffit de reproduire sur la formule (3) l'analyse appliquée par Euler à la formule (2) pour en conclure une formule récurrente différente de (1).

Je prends, dans les deux membres de l'équation (3), la dérivée logarithmique, je multiplie par z et je divise par 3; j'obtiens ainsi

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{z}{1-z}+\frac{2z^2}{1-z^2}+\frac{3z^3}{1-z^3}+\ldots\\ &=-\frac{1}{3}\,\frac{\sum(-1)^x(2x+1)\frac{x(x+1)}{2}z^{\frac{x(x+1)}{2}}}{\sum(-1)^x(2x+1)z^{\frac{x(x+1)}{2}}}.\end{aligned}\right.$$

On sait que le terme général du premier membre de l'équation (4), développé suivant les puissances croissantes de z, est $S(p)z^p$. Ce développement étant substitué dans l'équation (4), et le dénominateur chassé, on identifiera les deux membres, et l'on trouvera

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} S(n)&=3S(n-1)-5S(n-3)+7S(n-6)+\ldots\\ &\quad+(-1)^x(2x+1)S\left[n-\frac{x(x+1)}{2}\right]+\ldots.\end{aligned}\right.$$

La suite doit être prolongée jusqu'au dernier terme dans la parenthèse duquel figure un nombre positif. Dans le cas où n est de la forme $\frac{x(x+1)}{2}$, le terme $\frac{(-1)^x(2x+1)\,S(0)}{2}$ doit être remplacé par

$$(-1)^x(2x+1)\frac{x(x+1)}{6},$$

qui est effectivement un nombre entier.

La formule (5) est celle que j'avais en vue d'établir.