BULLETIN DE LA S. M. F.

M. C. FLYE SAINTE MARIE

Note sur un problème relatif à la marche du cavalier au l'échiquier

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 144-150
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__144_0>

Note sur un problème relatif à la marche du cavalier sur l'échiquier; par M. C. Flye Sainte-Marie.

(Séance du 18 avril 1877.)

La pièce nommée *cavalier* dans le jeu des échecs, se déplaçant, à chaque saut, de deux cases dans le sens d'un des côtés de l'échiquier et d'une case dans le sens de l'autre, on sait qu'on peut de plusieurs manières lui faire parcourir les 64 cases sans la faire passer deux fois par la même. La recherche du nombre de solutions que comporte ce problème paraît présenter d'assez grandes difficultés; mais si, au lieu de faire parcourir les 64 cases au cavalier, on se propose de lui faire parcourir seulement une moitié de l'échiquier, c'est-à-dire les 32 cases formant 4 rangées consécutives, le nombre des solutions du problème devient beaucoup plus facile à déterminer. C'est ce nombre que je me propose de rechercher ici.

La *fig.* 1 représente la moitié de l'échiquier. J'en partage les 32 cases en 2 groupes : le premier composé des 16 cases numérotées

Fig. 1

1		5		9		13	
2		6		10		14	
	4		8		12		16
	3		7		11		15

sur la figure, le second composé des 16 autres, de sorte que les cases blanches des 2 rangées extrêmes et les cases noires des rangées intermédiaires forment un même groupe. Dans le premier groupe, les cases de même couleur sont désignées par des numéros de même parité.

J'appellerai *extérieures* toutes les cases appartenant aux deux rangées extrêmes, et *intérieures* toutes celles appartenant aux deux rangées intermédiaires. Dans le premier groupe, les cases extérieures sont affectées de numéros impairs, et les cases intérieures de numéros pairs.

Je dirai qu'une case *a bat* une case *b* lorsque le cavalier peut, d'un seul saut, aller de *a* en *b*.

Si l'on représente le passage du cavalier d'une case à une autre par un trait joignant les centres de ces deux cases, le chemin complet que cette pièce aura à parcourir sera représenté par un contour polygonal de 31 côtés, dont les 30 sommets et les 2 extrémités occuperont les 32 cases de la figure.

Cela posé, je remarque qu'une case extérieure quelconque ne bat que des cases du même groupe, d'où il suit que le passage d'un groupe à l'autre ne peut se faire qu'entre deux cases intérieures. Il y aura donc forcément, dans le contour polygonal représentant le chemin suivi, au moins un trait dont les deux extrémités tomberont sur des cases intérieures. Or ce contour est formé, en tout, de 31 traits; il ne pourra donc y en avoir plus de 30 aboutissant par une de leurs extrémités à une case extérieure; mais, d'un autre côté, il ne peut pas y en avoir moins de 30, et encore, pour cela, faut-il que les points de départ et d'arrivée soient sur 2 des cases extérieures; alors celles-ci contiendront chacune l'extrémité d'un trait, et, à chacune des 14 autres, aboutiront 2 traits différents, en tout $2 + 28$ ou 30 traits qui tous seront distincts, car un même trait ne peut aboutir à la fois à 2 cases extérieures.

On tire de là les conséquences suivantes :

1° Il n'y a qu'un seul trait joignant 2 cases intérieures, c'est-à-dire un seul passage d'un groupe à l'autre. En d'autres termes, *les deux groupes sont parcourus en entier l'un après l'autre.*

2° *Le point de départ et le point d'arrivée sont sur deux cases extérieures.*

3° Il s'ensuit que *la case d'arrivée ne peut battre la case de départ.*

La première de ces conséquences introduit une grande simplification dans la recherche qui fait l'objet de cette Note; car il va nous suffire de connaître toutes les manières de parcourir un groupe, par exemple le groupe formé des cases numérotées sur la *fig.* 1.

Il est clair que, dans ce groupe, les deux extrémités du parcours sont nécessairement, l'une sur une case extérieure, l'autre sur une case intérieure. Nous aurions donc à rechercher successivement de combien de manières les 16 cases du groupe peuvent être parcourues en partant de l'une des cases affectées d'un numéro impair, pour aboutir à l'une des cases affectées d'un numéro pair. Tous ces problèmes se traiteraient facilement; mais il convient de restreindre le plus possible le nombre des cas à considérer.

D'abord il est clair que les solutions dont le point de départ serait sur l'une des cases 15, 11, 7 ou 3 ont pour symétriques, par rapport au centre de la figure, les solutions dont le point de départ est en 1, 5, 9 ou 13. Il suffira donc de considérer ces dernières.

En second lieu, une solution étant trouvée, on peut en déduire une autre en remplaçant chacune des cases intérieures par la case extérieure adjacente, et *vice versa;* car si, dans le groupe, une case a bat une case b, la case a' qu'on substituera ainsi à a battra encore la case b' substituée à b. D'après cela, il y aura autant de manières, par exemple, d'aller de la case 5 à la case 14 que de manières d'aller de la case 6 à la case 13.

Enfin, si l'on détermine toutes les manières d'aller de 1 à 4, on formera toutes les solutions dans lesquelles la case d'arrivée bat la case de départ (solutions que j'appellerai *fermées,* parce qu'elles peuvent être figurées par un polygone fermé, dont deux sommets consécutifs quelconques peuvent être indifféremment pris pour extrémités du parcours).

En effet, la case 1 ne battant que les deux cases 4 et 6, tout polygone figurant une solution fermée contiendra nécessairement les deux traits 1-4 et 1-6. Donc, lorsque la case d'arrivée battra la case de départ, toutes les solutions possibles se trouveront parmi celles obtenues en prenant pour points extrêmes les cases 1 et 4.

Les cas à traiter se réduisent ainsi aux suivants :

Cases de départ.	Cases d'arrivée.
1	2, 4, 8, 10, 12, 14 et 16
5	6, 12 et 14 [1]
9	4 et 10 [2]
13	4 et 14 [3]

---

(1) De 5 à 16, les solutions sont en même nombre que de 15 à 6, ou de 1 à 2.
(2) De 9 à 16, en même nombre que de 15 à 10, ou de 1 à 8.
(3) De 13 à 8, en même nombre que de 7 à 14, ou de 9 à 4.

Dans chacun de ces cas, la recherche de toutes les solutions possibles est facilitée par cette remarque, que les cases 1, 2, 15 et 16 ne battent chacune que 2 cases du groupe, de sorte que les deux traits aboutissant à celles de ces cases qui ne sont ni point de départ, ni point d'arrivée, peuvent être tracés d'avance.

Je me bornerai ici à indiquer, par le tableau suivant, le nombre des solutions possibles dans chaque cas, en réunissant devant une même accolade les différents cas dont les solutions d'un seul suffisent pour déterminer les solutions des autres, au moyen de l'une des remarques qui précèdent.

Extrémités du parcours.			Nombre et nature des solutions.
De	1 à	4	8 solutions fermées.
	1	6	
	3	2	
	5	2	
	11	16	
	13	16	
	15	12	
	15	14	
De	5 à	4	3 *id.*
	3	6	
	11	14	
	13	12	
De	5 à	8	2 *id.*
	7	6	
	9	12	
	11	10	
De	5 à	10	3 *id.*
	7	12	
	9	6	
	11	8	
De	9 à	8	6 *id.*
	7	10	
De	9 à	14	5 *id.*
	3	8	
	7	4	
	13	10	
De	1 à	2	22 solutions non fermées.
	15	16	

Extrémités du parcours.			Nombre et nature des solutions.
De	1 à 8		16 solutions non fermées.
	7	2	
	9	16	
	15	10	
De	1 à 10		13 *id.*
	7	16	
	9	2	
	15	8	
De	1 à 12		8 *id.*
	5	16	
	11	2	
	15	6	
De	1 à 14		10 *id.*
	3	16	
	13	2	
	15	4	
De	1 à 16		33 *id.*
	15	2	
De	5 à 6		2 *id.*
	11	12	
De	5 à 12		3 *id.*
	11	6	
De	5 à 14		3 *id.*
	3	12	
	11	4	
	13	6	
De	9 à 4		3 *id.*
	3	10	
	7	14	
	13	8	
De	9 à 10		6 *id.*
	7	8	
De	13 à 4		6 *id.*
	3	14	
De	13 à 14		4 *id.*
	3	4	

On reconnaîtra, d'après ce tableau, qu'on peut, selon la case de départ, aboutir :

A la case 2.............	De 118 manières
A la case 4.............	De 42 »
A la case 6.............	De 32 »
A la case 8.............	De 54 »

et, sans qu'il soit nécessaire de recourir au tableau pour la suite du dénombrement, on déduira de là, en raison de la symétrie de la figure, qu'on peut aboutir :

A la case 10.............	De 54 manières
A la case 12.............	De 32 »
A la case 14.............	De 42 »
A la case 16.............	De 118 »

Considérons maintenant l'ensemble des deux groupes (*fig.* 2). Je conserve, pour les cases du premier groupe, le numérotage déjà

Fig. 2.

1	3′	5	7′	9	11′	13	15′
2	4′	6	8′	10	12′	14	16′
2′	4	6′	8	10′	12	14′	16
1′	3	5′	7	9′	11	13′	15

employé sur la *fig.* 1. Dans le second groupe, les numéros se distinguent de ceux du premier par un accent, et sont disposés symétriquement à ceux-ci. Il y aura évidemment autant de manières de parcourir le second groupe à partir d'une case de numéro pair p qu'il y a de manières de parcourir le premier en aboutissant à la case symétrique p.

Or, pour passer du premier groupe au second, on peut, de la case 2, tomber sur la case 6′, ce qui fournira, d'après les chiffres précédents, 118×32 ou 3776 solutions, ou bien de 4 sur 8′, ce qui fournit $42 \times 54 = 2268$ solutions, ou de 6 sur 2′, ce qui ne donnera que des solutions symétriques de celles obtenues en passant de 2 à 6′, solutions que je ne considérerai pas comme distinctes des précédentes, ou bien encore de 6 sur $10'$, ce qui donnera 32×54 ou 1728 solutions : en tout 7772 *manières distinctes de faire parcourir au cavalier la moitié de l'échiquier.*

Deux de ces solutions ne peuvent pas être symétriques l'une de l'autre ni par rapport à un des axes de la figure, ni par rapport à son centre; car l'unique trait qui marque le passage d'un groupe à l'autre n'occupe jamais deux positions symétriques. Quant aux autres solutions possibles, elles se déduiraient des précédentes par voie de symétrie, et, pour cette raison, je ne les considérerai pas comme en étant distinctes.

On remarquera que les principes qui nous ont guidé dans ces recherches sont indépendants du nombre de cases contenues dans une rangée, et supposent seulement que le nombre des rangées est égal à 4; mais il est clair que le dénombrement deviendrait d'autant plus pénible que le nombre des cases de chaque rangée serait plus considérable.