BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LUCAS

Formules fondamentales de géométrie triciculaire et tétrasphérique

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 136-143
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__136_1>

Formules fondamentales de Géométrie tricirculaire et tétrasphérique; par M. Éd. Lucas.

(Séance du 2 mai 1877.)

1. Notations. — Nous désignerons par :

r_i le rayon d'un cercle ou d'une sphère de centre O_i;

d_{ij} la distance des centres O_i et O_j de deux cercles, ou de deux sphères;

a_{ij} le cosinus de l'angle des deux cercles ou des deux sphères O_i et O_j;

r_{ij} le rayon du cercle ou de la sphère qui coupe orthogonalement les deux cercles ou les deux sphères O_i et O_j et la ligne de leurs centres;

s_{ijk} l'aire du triangle des centres O_i, O_j et O_k de trois cercles d'un plan ou de trois sphères;

r_{ijk} le rayon du cercle orthogonal aux trois cercles d'un plan ou de la sphère orthogonale à trois sphères et au plan de leurs centres;

v_{ijkl} le volume du tétraèdre formé par les centres de quatre sphères;

r_{ijkl} le rayon de la sphère orthogonale à quatre sphères;

x, avec l'indice correspondant, la puissance par rapport au cercle d'un point de son plan, ou la puissance par rapport à la sphère d'un point de l'espace.

De plus, nous supposons

$$\sin^2 A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix},$$

$$\sin^2 A_{ijk} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} \end{vmatrix},$$

$$\sin^2 A_{ijkl} = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & a_{il} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} \end{vmatrix},$$

et ainsi de suite.

2. Cela posé, on a les formules suivantes :

$$(1) \qquad 2 r_i r_j a_{ij} = r_i^2 + r_j^2 - d_{ij}^2,$$

$$(2) \qquad (r_{ij} d_{ij})^2 + (r_i r_j \sin A_{ij})^2 = 0,$$

$$(3) \qquad (1.2\, r_{ijk} s_{ijk})^2 + (r_i r_j r_k \sin A_{ijk})^2 = 0,$$

$$(4) \qquad (1.2.3\, r_{ijkl} v_{ijkl})^2 + (r_i r_j r_k r_l \sin A_{ijkl})^2 = 0.$$

3. On a encore

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & \frac{1}{r_j} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_{ij}^2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$(6) \qquad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{1}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{1}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \frac{1}{r_k} \\ \frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_k} & \frac{1}{r_{ijk}^2} \end{vmatrix} = 0,$$

$$
7)\qquad
\begin{vmatrix}
a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & a_{il} & \frac{1}{r_i} \\
a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} & \frac{1}{r_j} \\
a_{ki} & a_{kj} & a_{lk} & a_{kl} & \frac{1}{r_k} \\
a_{li} & a_{lj} & a_{lk} & a_{il} & \frac{1}{r_l} \\
\frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_k} & \frac{1}{r_l} & \frac{1}{r^2_{ijkl}}
\end{vmatrix} = 0.
$$

Ces formules permettent de *déterminer* par comparaison, avec les précédentes (2), (3) et (4), *la longueur de la distance, l'aire du triangle ou le volume du tétraèdre formé par les centres de deux, trois ou quatre sphères dont on donne les rayons et les angles.*

On a ainsi

$$
(8)\qquad
\begin{vmatrix}
a_{ii} & a_{ij} & \frac{1}{r_i} \\
a_{ji} & a_{jj} & \frac{1}{r_j} \\
\frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & 0
\end{vmatrix} = \left(\frac{d_{ij}}{r_i r_j}\right)^2,
$$

$$
(9)\qquad
\begin{vmatrix}
a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{1}{r_i} \\
a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{1}{r_j} \\
a_{ki} & a_{kj} & a_{ll} & \frac{1}{r_k} \\
\frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_k} & 0
\end{vmatrix} = \left(\frac{2\, s_{ijk}}{r_i r_j r_k}\right)^2,
$$

$$
(10)\qquad
\begin{vmatrix}
a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & a_{il} & \frac{1}{r_i} \\
a_{ji} & a_{ij} & a_{jk} & a_{jl} & \frac{1}{r_j} \\
a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} & \frac{1}{r_k} \\
a_{li} & a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} & \frac{1}{r_l} \\
\frac{1}{r_i} & \frac{1}{r_j} & \frac{1}{r_k} & \frac{1}{r_l} & 0
\end{vmatrix} = \left(\frac{2.3.v_{ijkl}}{r_i r_j r_k r_l}\right)^2.
$$

4. On a, entre les cosinus des angles de cinq sphères quelconques de l'espace, la relation

$$\sin^2 A_{ijklm} = 0; \tag{11}$$

on a d'ailleurs une formule analogue pour les cercles d'un plan.

Les puissances d'un point par rapport à quatre cercles O_1, O_2, O_3 et O_4 sont liées par la formule

$$x_i s_{jkl} - x_j s_{kli} + x_k s_{lij} - x_l s_{ijk} = K, \tag{12}$$

dans laquelle le second membre est constant; on a, de même, pour les puissances d'un point par rapport à cinq sphères quelconques,

$$x_i v_{jklm} - x_j v_{klmi} + x_k v_{lmij} - x_l v_{mijk} + x_m v_{ijkl} = K. \tag{13}$$

Lorsque les quatre cercles sont orthogonaux à un même cercle, ou lorsque les cinq sphères sont orthogonales à une même sphère, le second membre des équations précédentes est nul.

5. Désignons par ξ_{ij} la distance du centre radical de trois cercles O_i, O_j et O_k à la droite des centres O_i et O_j, et par ξ_{ijk} la distance du centre radical de quatre sphères O_i, O_j, O_k et O_l au plan des trois centres O_i, O_j et O_k; on a, pour le calcul de ces distances, les formules

$$(d_{ij}\xi_{ij})^2 = (r_i r_j \sin A_{ij})^2 + (d_{ij} r_{ijk})^2, \tag{14}$$

ou encore

$$\xi_{ij}^2 = r_{ijk}^2 - r_{ij}^2; \tag{15}$$

et, dans l'espace,

$$(s_{ijk}\xi_{ijk})^2 = (2 r_i r_j r_k \sin A_{ijk})^2 + (d_{ijk} r_{ijkl})^2, \tag{16}$$

ou encore

$$\xi_{ijk}^2 = r_{ijkl}^2 - r_{ijk}^2. \tag{17}$$

6. On a pour l'équation linéaire du cercle orthogonal à trois cercles O_i, O_j, O_k, ou de la sphère orthogonale à trois sphères et au plan de leurs centres

$$x_{ijk} = \frac{1}{2 s_{ijk}} (x_i d_{jk}\xi_{jk} + x_j d_{ki}\xi_{ki} + x_k d_{ij}\xi_{ij}) + 2 r_{ijk}^2; \tag{18}$$

de même, pour l'équation de la sphère orthogonale à quatre sphères

$$(19) \quad x_{ijkl} = \frac{1}{3v_{ijkl}}(x_i d_{jkl}\xi_{jkl} + x_j d_{kli}\xi_{kli} + x_k d_{lij}\xi_{lij} + x_l d_{ijk}\xi_{ijk}) + 2r_{ijkl}^2.$$

On obtient encore les équations homogènes et quadratiques du cercle orthogonal à trois cercles, ou de la sphère orthogonale à quatre sphères, par les formules suivantes :

$$(20) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \dfrac{x_i}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \dfrac{x_j}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \dfrac{x_k}{r_k} \\ \dfrac{x_i}{r_i} & \dfrac{x_j}{r_j} & \dfrac{x_k}{r_k} & \left(\dfrac{x_{ijk}}{r_{ijk}}\right)^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(21) \quad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & a_{il} & \dfrac{x_i}{r_j} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & a_{jl} & \dfrac{x_j}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & a_{kl} & \dfrac{x_k}{r_k} \\ a_{li} & a_{lj} & a_{lk} & a_{ll} & \dfrac{x_l}{r_l} \\ \dfrac{x_i}{r_i} & \dfrac{x_j}{r_j} & \dfrac{x_k}{r_k} & \dfrac{x_l}{r_l} & \left(\dfrac{x_{ijkl}}{r_{ijkl}}\right)^2 \end{vmatrix} = 0.$$

On aurait de même l'équation linéaire et l'équation quadratique homogène du cercle ou de la sphère orthogonale à deux cercles ou à deux sphères et à la ligne de leurs centres.

Il existe entre les puissances d'un point par rapport à trois cercles quelconques la relation fondamentale

$$(22) \quad \begin{vmatrix} x_i + x_i + 2a_{ii}r_ir_i & x_i + x_j + 2a_{ij}r_ir_j & x_i + x_k + 2a_{ik}r_ir_k \\ x_j + x_i + 2a_{ji}r_jr_i & x_j + x_j + 2a_{jj}r_jr_j & x_j + x_k + 2a_{jk}r_jr_k \\ x_k + x_i + 2a_{ki}r_kr_i & x_k + x_j + 2a_{kj}r_kr_j & x_k + x_k + 2a_{kk}r_kr_k \end{vmatrix} = 0.$$

Cette relation est du second degré; il en existe une analogue pour les puissances d'un point par rapport à quatre sphères; on a plus simplement pour les puissances par rapport à deux cercles, d'un point de la ligne des centres,

$$(12)\qquad \begin{vmatrix} x_i + x_i + 2a_{ii}r_ir_i & x_i + x_j + 2a_{ij}r_ir_j \\ x_j + x_i + 2a_{ji}r_jr_j & x_i + x_j + 2a_{jj}r_jr_j \end{vmatrix} = 0.$$

7. L'ensemble de deux cercles ou de deux sphères réciproques par rapport au cercle ou à la sphère O_{ijk} a pour équation

$$(24)\qquad \frac{2s_{ijk}}{r_ir_jr_k}x_{ijk} \pm \left(\frac{p_ix_i}{r_i} + \frac{p_jx_j}{r_j} + \frac{p_kx_k}{r_k}\right) = 0,$$

ou, en tirant x_{ijk} de la formule (20),

$$(25)\qquad \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{x_i}{r_i} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{x_j}{r_j} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \frac{x_k}{r_k} \\ \frac{x_i}{r_i} & \frac{x_j}{r_j} & \frac{x_k}{r_k} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{p_ix_i}{r_i} + \frac{p_jx_j}{r_j} + \frac{p_kx_k}{r_k}\right)^2.$$

On obtient, pour déterminer les rayons ρ de ces deux cercles, la formule

$$(26)\qquad \rho\left(\frac{p_i \sin A_{jk}}{r_i} + \frac{p_j \sin A_{ki}}{r_j} + \frac{p_k \sin A_{ij}}{r_k} \pm \frac{2S_{ijk}}{r_ir_jr_k}\right) = \sqrt{\Delta},$$

en supposant

$$(27)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} & a_{ik} & \frac{p_i}{r_i}\sin A_{jk} \\ a_{ji} & a_{jj} & a_{jk} & \frac{p_j}{r_j}\sin A_{ki} \\ a_{ki} & a_{kj} & a_{kk} & \frac{p_k}{r_k}\sin A_{ij} \\ \frac{p_i}{r_i}\sin A_{jk} & \frac{p_j}{r_j}\sin A_{ki} & \frac{p_k}{r_k}\sin A_{ij} & -1 \end{vmatrix}.$$

On obtiendra de même les équations et les rayons de deux sphères réciproques par rapport à la sphère orthogonale à quatre sphères données.

8. En déterminant les coefficients p_i, de telle sorte que l'ensemble des cercles ou des sphères réciproques passe par les points d'intersection des trois cercles ou des quatre sphères, on a pour le système des huit cercles passant par trois des six points d'intersection de trois cercles donnés l'équation

$$(28) \qquad \frac{2\,S_{ijk}}{r_i r_j r_k} x_{ijk} \pm \left(\frac{x_i}{r_i}\sin A_{jk} \pm \frac{x_j}{r_j}\sin A_{ki} \pm \frac{x_k}{r_k}\sin A_{ij}\right) = 0.$$

Cette équation devient du *seizième* degré en coordonnées cartésiennes, après la disparition des doubles signes. L'équation précédente peut s'écrire encore

$$(29) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{r_i}{x_i}[\cos(A_{ij} \pm A_{ik}) - \cos A_{jk}] \\ &\quad + \frac{r_j}{x_j}[\cos(A_{ji} \pm A_{jk}) - \cos A_{ki}] \\ &\quad + \frac{r_k}{x_k}[\cos(A_{kj} \pm A_{ki}) - \cos A_{ij}] = 0. \end{aligned}\right.$$

L'ensemble du système de deux cercles réciproques, défini par la règle des signes, a pour équation

$$(30) \qquad \left\{\begin{aligned} &r_i x_j x_k \sin\frac{A_{ki} + A_{ij} - A_{jk}}{2} + r_j x_k x_i \sin\frac{A_{ij} + A_{jk} - A_{ki}}{2} \\ &\qquad + r_k x_i x_j \sin\frac{A_{jk} + A_{ki} - A_{ij}}{2} = 0. \end{aligned}\right.$$

Les rayons ρ de ces deux cercles sont fournis par la formule

$$(31) \qquad \frac{2}{\rho}\sin\frac{A_{jk} + A_{ki} + A_{ij}}{2} = \frac{\sin A_{jk}}{r_i} + \frac{\sin A_{ki}}{r_j} + \frac{\sin A_{ij}}{r_k} \pm \frac{2\,S_{ijk}}{r_i r_j r_k}.$$

Il est facile d'appliquer ces résultats au système de quatre sphères ou *tétrasphère*. L'ensemble des seize sphères circonscrites à la tétrasphère est donné par l'équation

$$(32) \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{6\,V_{ijkl}}{r_i r_j r_k r_l} X_{ijkl} \\ &\quad \pm \left(\frac{x_i}{r_i}\sin A_{jkl} \pm \frac{x_j}{r_j}\sin A_{kli} \pm \frac{x_k}{r_k}\sin A_{lij} \pm \frac{x_l}{r_l}\sin A_{ijk}\right) = 0, \end{aligned}\right.$$

qui devient du *trente-deuxième* degré en coordonnées cartésiennes.

Les rayons ρ des sphères circonscrites sont donnés par la formule

$$(33)\quad \begin{cases} \dfrac{2}{\rho}\sin\dfrac{A_{jkl}+A_{kli}+A_{lij}+A_{ijk}}{2} \\ \quad = \dfrac{\sin A_{jkl}}{r_i}+\dfrac{\sin A_{kli}}{r_j}+\dfrac{\sin A_{lij}}{r_k}+\dfrac{\sin A_{ijk}}{r_l}\pm\dfrac{6V_{ijkl}}{r_i r_j r_k r_l}. \end{cases}$$

La formule (31) conduit immédiatement à ce théorème :

Théorème. — *La somme des inverses des rayons des cercles passant par trois des six points d'intersection de trois cercles orthogonaux deux à deux est nulle.*

9. Par des considérations analogues aux précédentes, on obtient l'équation du système des huit cercles tangents à trois cercles donnés et des seize sphères tangentes à quatre sphères données. On a, dans ce dernier cas,

$$(34)\quad \begin{vmatrix} 0 & \sin^2\dfrac{A_{ij}}{2} & \sin^2\dfrac{A_{ik}}{2} & \sin^2\dfrac{A_{il}}{2} & \dfrac{x_i}{r_i} \\ \sin^2\dfrac{A_{ji}}{2} & 0 & \sin^2\dfrac{A_{jk}}{2} & \sin^2\dfrac{A_{jl}}{2} & \dfrac{x_j}{r_j} \\ \sin^2\dfrac{A_{ki}}{2} & \sin^2\dfrac{A_{kj}}{2} & 0 & \sin^2\dfrac{A_{kl}}{2} & \dfrac{x_k}{r_k} \\ \sin^2\dfrac{A_{li}}{2} & \sin^2\dfrac{A_{lj}}{2} & \sin^2\dfrac{A_{lk}}{2} & 0 & \dfrac{x_l}{r_l} \\ \dfrac{x_i}{r_i} & \dfrac{x_j}{r_j} & \dfrac{x_k}{r_k} & \dfrac{x_l}{r_l} & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

On trouvera des résultats analogues pour les rayons de ces sphères et pour les équations et les rayons des cercles conjugués au système de trois cercles, et des sphères conjuguées à la tétrasphère.