BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FOURET

Détermination par le principe de correspondance du nombre des points d'un plan en lesquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois systèmes donnés

Bulletin de la S. M. F., tome 5 (1877), p. 130-134

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1877__5__130_0>

Determination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'un plan en lesquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois systèmes donnés; par M. G. Fouret.

(Séance du 21 février 1877.)

1. Étant donnés sur un plan trois systèmes de courbes, définis chacun par une équation différentielle du premier ordre algébrique, il existe un nombre limité de points en lesquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à ces trois systèmes. Ce nombre de points est le nombre des solutions en x, y, $\frac{dy}{dx}$ qui vérifient simultanément les trois équations : il s'exprime assez simplement, comme on va le voir, en fonction des caractéristiques des trois systèmes. Pour y parvenir, je m'appuierai sur quelques résultats déjà connus que je vais rappeler brièvement.

2. Considérons un premier système défini par ses deux caractéristiques, à savoir le nombre μ des courbes de ce système qui passent par un point quelconque, et le nombre ν des mêmes courbes qui touchent une droite quelconque.

1° *Le lieu des points de contact des tangentes à ces courbes issues d'un point* O *quelconque est une courbe de degré* $\mu + \nu$, *ayant un point multiple d'ordre* μ *en* O.

2° *L'enveloppe des tangentes à ces mêmes courbes, en leurs points de rencontre avec une droite* D *quelconque, est une courbe de la classe* $\mu + \nu$, *admettant* D *comme tangente multiple d'ordre* ν.

Ces deux courbes, si intimement liées aux deux caractéristiques du système, sont d'un usage très-fréquent : pour cette raison, il serait commode de leur donner un nom ; j'appellerai, dans la suite, la première *indicatrice point* du système, la seconde *indicatrice droite,* en mentionnant, quand il y aura lieu, le point ou la droite dont dépendra l'indicatrice considérée.

3. Imaginons un deuxième système (μ', ν') dans le même plan que le premier. *Le lieu des points de contact de deux courbes*

appartenant respectivement aux deux systèmes (μ, ν), (μ', ν'), *est une courbe de degré* $\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu$ [1].

Cherchons en effet le nombre des points d'intersection de ce lieu avec une droite D quelconque. Les *indicatrices droites* des deux systèmes par rapport à D sont respectivement de classe $\mu + \nu$ et $\mu' + \nu'$, et admettent respectivement D pour tangente multiple d'ordre ν et ν'. Par suite, ces deux courbes ont $(\mu + \nu)(\mu' + \nu')$ tangentes communes dont $\nu\nu'$ confondues avec D, soit, abstraction faite des dernières, $\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu$ tangentes communes dont les points de rencontre avec D sont les points du lieu cherché.

On démontre de la même manière la propriété corrélative consistant en ce que *l'enveloppe des droites touchées en un de leurs points par deux courbes appartenant respectivement à deux systèmes* (μ, ν), (μ', ν') *est une courbe de classe* $\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu$.

4. Les résultats que je viens de rappeler suffisent, avec l'aide du principe de correspondance, pour résoudre la question qui fait l'objet de cette Note.

Considérons à cet effet trois systèmes de courbes (μ, ν), (μ', ν'), (μ'', ν''), situés dans un même plan, et un point O dans ce plan. Traçons une droite Ox quelconque : elle va couper en $\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu$ points la courbe (A) lieu des points en chacun desquels se touchent deux courbes appartenant respectivement aux deux systèmes (μ, ν), (μ', ν'). Soit a l'un de ces points, et at la tangente commune aux deux courbes. Il existe ν'' courbes du système (μ'', ν'') tangentes à chacune des droites at. Les points de contact b joints à O donnent en tout $\nu''(\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$ droites Oy; donc à une droite Ox correspondent $\nu''(\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$ droites Oy.

Réciproquement, traçons une droite Oy quelconque, et considérons d'une part l'*indicatrice droite* du système (μ'', ν'') relative à Oy, qui est de classe $\mu'' + \nu''$, et la courbe (B) enveloppe des droites touchées en un de leurs points par deux courbes appartenant respectivement aux deux systèmes (μ, ν), (μ', ν'), qui est de classe $\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu$. Ces deux courbes ont $(\mu'' + \nu'')(\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$

[1] J'ai énoncé et démontré d'une autre manière ce théorème en 1874 dans mon *Mémoire sur les systèmes généraux*, etc. (*Ibid.*, t. II, p. 72.) — M. Schubert en a donné dernièrement une autre démonstration. (*Math. Ann.*, t. X, p. 106; 1876.)

tangentes communes. Les $(\mu'' + \nu'')(\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$ points de contact a obtenus étant joints à O donnent autant de droites Ox. Donc à une droite Oy correspondent $(\mu''+\nu'')(\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$ droites Ox. Par suite, en vertu du principe de correspondance, il existe $\nu''(\mu\mu' + \mu\nu' + \mu'\nu) + (\mu'' + \nu'')(\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$ coïncidences d'une droite Ox avec une des droites correspondantes Oy. Chacune de ces coïncidences donne évidemment lieu à un contact de trois courbes appartenant respectivement aux trois systèmes, sauf le cas où la droite at passe par le point O. Or du point O on peut mener à la courbe (B) $\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu$ tangentes, dont chacune compte ν'' fois dans le nombre total des coïncidences. En déduisant de ce dernier nombre $\nu''(\nu\nu' + \mu\nu' + \mu'\nu)$, il reste

$$\mu\nu'\nu'' + \mu'\nu''\nu + \mu''\nu\nu' + \nu\mu'\mu'' + \nu'\mu''\mu + \nu''\mu\mu'$$

pour le nombre des points de contact cherché. On peut donc énoncer le théorème suivant, dont il est inutile de faire ressortir toute la généralité :

Théorème. — *Le nombre des points d'un plan en chacun desquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois systèmes* (μ, ν), (μ', ν'), (μ'', ν'') *est égal à*

$$\mu\nu'\nu'' + \mu'\nu''\nu + \mu''\nu\nu' + \nu\mu'\mu'' + \nu'\mu''\mu + \nu''\mu\mu'.$$

5. Ce théorème fournit presque immédiatement de nombreux corollaires. On en déduit notamment un théorème connu sur les faisceaux de courbes algébriques. Supposons que les trois systèmes soient trois faisceaux de courbes algébriques d'ordre respectivement égal à m, m', m''. On a alors

$$\mu = \mu' = \mu'' = 1, \quad \nu = 2(m-1), \quad \nu' = 2(m'-1), \quad \nu'' = 2(m''-1),$$

et, en substituant dans l'expression écrite plus haut, on obtient, toutes réductions faites, le résultat suivant :

Le nombre des points d'un plan en chacun desquels se touchent trois courbes appartenant respectivement à trois faisceaux de courbes d'ordre m, m', m'' *est*

$$4(m'm'' + m''m + mm') - 6(m + m' + m'') + 6 \text{ (1)}.$$

(1) Salmon, *Treatise on the higher plane curves*, p. 348.

6. Etant données sur un même plan trois courbes algébriques dont les degrés soient respectivement m, m', m'', et les classes n, n', n'', cherchons de combien de manières différentes on peut les amener à se toucher en un même point, en les déplaçant dans leur plan commun d'un mouvement de translation rectiligne variable en direction de l'une à l'autre.

La courbe (m, n) dans ses positions successives forme un système dont les caractéristiques s'aperçoivent immédiatement. On a en effet $\mu = m$, $\nu = n$ [1]. Les deux autres courbes donnent lieu à deux autres systèmes dont les caractéristiques sont respectivement $\mu' = m'$, $\nu' = n'$, et $\mu'' = m''$, $\nu'' = n''$. Par suite, en vertu du théorème démontré plus haut, le nombre des solutions est

$$mn'n'' + m'n''n + m''nn' + nm'm'' + n'm''m + n''mm'.$$

En particulier, dans le cas de trois coniques quelconques, ce nombre est égal à 48. Il se réduit à 18 dans le cas de trois paraboles [2].

Cherchons de combien de manières on peut amener les trois courbes en contact, en les faisant tourner chacune autour d'un point fixe du plan. Les trois courbes, en se déplaçant, forment alors trois systèmes : les caractéristiques sont $\mu = 2m$, $\mu' = 2m'$, $\mu'' = 2m''$, $\nu = 2n$, $\nu' = 2n'$, $\nu'' = 2n''$, et, en appliquant le théorème général, on obtient pour le nombre des solutions cherchées

$$8(mn'n'' + m'n''n + m''nn' + nm'm'' + n'm''m + n''mm');$$

dans le cas de trois coniques quelconques, ce nombre est égal à 384.

Remarque. — Le théorème que nous avons démontré dans cette Note peut se conclure d'un théorème sur les *connexes* auquel M. Lindemann est parvenu en suivant une voie différente [3]. Ce dernier théorème consiste en ce que : *le nombre des éléments com-*

---

(1) La caractéristique ν serait cependant inférieure à n, si la courbe était tangente à la droite de l'infini.

(2) Il est évidemment nul dans le cas de trois cercles.

(3) *Vorlesungen über Geometrie von Alfred Clebsch,* bearbeitet und herausgegeben von Dr F. LINDEMANN. — Ersten Bandes, zweiter Theil, p. 940.

muns à quatre connexes (m, n), (m', n'), (m'', n''), (m''', n''') *est égal à*

$$mm'n''n''' + m'm''n'''n + m''m'''nn' + mm''n'n''' + m'm'''n''n + mm'''n''n'.$$

En supposant que l'un des connexes (m''', n''') soit le *connexe identique*, la formule précédente donne le nombre des éléments communs à trois *coïncidences principales* (m, n), (m', n'), (m'', n''), ou, ce qui revient au même, à un point de vue un peu différent, le nombre des points en lesquels se touchent les courbes de trois systèmes. On retombe en effet sur la formule que nous avons démontrée, en introduisant dans celle de M. Lindemann l'hypothèse

$$m''' = n''' = 1.$$