

BULLETIN DE LA S. M. F.

L. SALTEL

Sur la génération des cycliques et cyclides. Seconde note pour la génération des cycliques

Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 95-100

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__95_1>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__95_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1875, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Sur la génération des cycliques et cyclides; par M. L. SALTÉL.

(Séance du 14 avril 1875)

PROBLÈMES PRÉLIMINAIRES.

PROBLÈME I. — *Étant donné dans un plan un cercle S, déterminer deux cercles passant respectivement par deux couples de points donnés (A_1, B_1) , (A_2, B_2) et coupant le cercle S aux deux mêmes points? En d'autres termes, trouver deux cercles passant respectivement par (A_1, B_1) , (A_2, B_2) et ayant même axe radical avec le cercle S.*

Voici la solution que nous proposons et dont la démonstration est évidente :
Par les points (A_1, B_1) faites passer un cercle arbitraire λ_1 ; soit I_1 le point de rencontre de la droite A_1B_1 avec l'axe radical des cercles S et λ_1 ; de même par les points (A_2, B_2) faites passer un second cercle quelconque λ_2 , et soit I_2 le point de rencontre de la droite A_2B_2 avec l'axe radical des cercles S et λ_2 ; la droite I_1I_2 rencontre le cercle S aux deux points cherchés.

PROBLÈME II. — *Étant donné sur une sphère un cercle S, déterminer deux cercles de cette sphère passant respectivement par deux couples de points donnés (A_1, B_1) , (A_2, B_2) et coupant le cercle S aux deux mêmes points?*

De la solution du problème précédent résulte immédiatement la suivante pour ce second problème :

Prenons un point arbitraire P sur la sphère, et par les points (A_1, B_1) traçons sur cette surface un cercle arbitraire λ_1 ; soit I_1 le point de rencontre du cercle PA_1B_1 avec le cercle qui passe par P et par les deux points d'intersection des deux cercles S et λ_1 ; de même par les points (A_2, B_2) traçons sur la sphère un second cercle arbitraire λ_2 ; soit I_2 le point de rencontre du cercle PA_2B_2 avec le cercle qui passe par P et par les deux points d'intersection des deux cercles S et λ_2 ; le cercle PI_1I_2 rencontre le cercle S aux deux points demandés.

PROBLÈME III. — Étant donnés trois cercles arbitraires dans l'espace λ, C_1, C_2 , trouver deux sphères qui passent respectivement par les deux derniers et qui coupent le premier aux deux mêmes points.

Si l'on considère les points d'intersection (A_1, B_1) , (A_2, B_2) des cercles C_1, C_2 avec le plan du cercle λ , la question est évidemment ramenée à celle du premier problème.

THÉORÈMES SUR LES CYCLIQUES PLANES (*).

THÉORÈME I. — Soient C_1, C_2 deux points d'une cyclique plane Σ , et (P, Q) , (A_1, A_2) les points d'intersection de cette courbe et de deux cercles passant par (C_1, C_2) ; si l'on considère la série des cercles passant par (A_1, A_2) et coupant Σ suivant des couples de points (M_1, N_1) , (M_2, N_2) , (M_3, N_3) , ..., les cercles (PM_1N_1) , (PM_2N_2) , (PM_3N_3) , ..., contenant tous le point P , passent aussi par le point Q .

THÉORÈME II. — Soient (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) trois couples de points arbitraires pris dans un même plan; si, par les deux premiers points (A_1, B_1) , on mène un cercle quelconque λ , et que l'on considère les deux cercles passant respectivement par les points (A_2, B_2) , (A_3, B_3) et coupant le cercle λ aux deux points α_1, α_2 , ces derniers points décrivent une cyclique du 4^{ème} ordre contenant les six points (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) .

THÉORÈME III. — Non-seulement la réciproque du théorème précédent est vraie; mais on peut, étant donnée une cyclique quelconque Σ , trouver une infinité de systèmes de points (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) qui peuvent servir à sa génération.

Voici un moyen de déterminer ces systèmes de points :

Soient P, Q deux points arbitraires de la cyclique, et (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) les trois couples de points d'intersection de cette même cyclique et de trois cercles quelconques passant par P, Q ; ces trois couples de points répondent à la question.

REMARQUE. — Parmi les nombreux corollaires que l'on peut déduire de cet important théorème, nous ne citerons que les suivants :

(*) Courbes du 4^e ordre ayant pour points doubles les points circulaires à l'infini.

1° *Détermination de la tangente en un point quelconque.* — Il est manifeste que si l'on sait déterminer la tangente au point A_1 , on saura la déterminer par là même en un point quelconque. Cette dernière détermination résulte immédiatement de la génération que nous venons d'indiquer et l'on est conduit à cette règle :

Soit A'_1 le second point de rencontre des cercles $(A_1A_2B_2)$, $(A_1A_3B_3)$; la tangente au point A_1 au cercle $(A_1B_1A'_1)$ est la tangente demandée.

2° *Détermination du cercle osculateur en un point quelconque.* — Si l'on suppose les deux points (A_1, B_1) réunis au point A dans la direction AT , on obtient le cercle osculateur en ce point en procédant comme il suit :

Soit A' le second point d'intersection des cercles (AA_2B_2) , (AA_3B_3) , le cercle qui est tangent en A à la droite AT et qui passe par le point A' est le cercle osculateur cherché.

THÉORÈMES SUR LES CYCLIQUES SPHÉRIQUES (*).

THÉORÈME I. — Soient C_1, C_2 deux points d'une cyclique sphérique Σ , et (P, Q) , (A_1, A_2) les points d'intersection de cette courbe et de deux cercles passant par (C_1, C_2) ; si l'on considère la série des cercles passant par (A_1, A_2) et coupant Σ suivant des couples de points (M_1, N_1) , (M_2, N_2) , (M_3, N_3) , ..., les cercles (PM_1N_1) , (PM_2N_2) , (PM_3N_3) , ..., contenant tous le point P , passent aussi par le point Q .

THÉORÈME II. — Soient (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) trois couples de points arbitraires pris sur une même sphère; si, par les deux premiers points (A_1, B_1) , on mène un cercle quelconque λ situé sur la sphère et que l'on considère les deux cercles passant respectivement par les points (A_2, B_2) , (A_3, B_3) et coupant le cercle λ aux deux mêmes points α_1, α_2 , ces derniers points décriront une cyclique sphérique du 4^{ème} ordre contenant les six points (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) .

THÉORÈME III. — Non-seulement la réciproque du théorème précédent est vraie; mais on peut, étant donné une cyclique sphérique quelconque Σ , trouver une infinité de systèmes de points (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) , qui peuvent servir à sa génération.

Voici un moyen de déterminer ces systèmes de points :

Soient P, Q deux points arbitraires de la cyclique, et (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) les trois couples de points d'intersection de cette même cyclique et de trois cercles quelconques de la sphère passant par (P, Q) ; ces trois couples de points répondent à la question.

Parmi les corollaires que l'on peut déduire de ce théorème, nous ne citerons que les suivants :

1° *Détermination de la tangente en un point quelconque.* — Il suffit évidemment de savoir la déterminer au point A_1 . Pour cela, on suivra la règle suivante :

(*) Courbes résultant de l'intersection d'une surface du second ordre et d'une sphère.

Soit A'_1 le second point de rencontre des cercles $(A_1A_2B_2)$, $(A_1A_3B_3)$; la tangente au point A_1 au cercle $(A_1B_1A'_1)$ est la tangente demandée.

M. Darboux, dans son ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 56 et 77, donne deux solutions différentes de ce même problème.

2° *Détermination du cercle osculateur en un point quelconque.* — Si l'on suppose les deux points A_1, B_1 réunis au point A dans la direction AT , on obtient le cercle osculateur en procédant comme il suit :

Soit A' le second point d'intersection des cercles (AA_2B_2) , (AA_3B_3) , le cercle qui est tangent en A à la droite AT et qui passe par le point A' est le cercle osculateur cherché (*).

THÉORÈMES SUR LES CYCLIDES DU 4^{ème} ORDRE (**).

THÉORÈME I. — Soit C un cercle de la cyclide Σ et C_1, C_2 deux cercles d'intersection de cette surface et de deux sphères passant par le 1^{er} cercle C ; si l'on considère la série des sphères passant par C_2 et coupant Σ suivant des cercles $E_1, E_2, E_3, \dots$, les sphères $(PE_1), (PE_2), (PE_3), \dots$, contenant un même point P du cercle C_1 , le contiennent en entier.

THÉORÈME II. — Soient C_1, C_2 deux cercles arbitraires pris dans l'espace; si, par deux points P_1, P_2 également arbitraires, on mène un cercle λ dont le plan et le rayon sont arbitraires, et que l'on considère les deux sphères passant respectivement par les cercles C_1, C_2 et coupant le cercle λ aux deux mêmes points α_1, α_2 , ces derniers points décrivent une cyclide du 4^{ème} ordre contenant les points P_1, P_2 et les deux cercles C_1, C_2 .

THÉORÈME III. — Non-seulement la réciproque du théorème précédent est vraie; mais on peut, étant donnée une cyclide quelconque Σ , trouver une infinité de systèmes de points P_1, P_2 et de cercles C_1, C_2 qui peuvent servir à sa génération.

Voici un moyen de les déterminer :

Soit C un cercle arbitraire de la cyclide et C', C_1, C_2 les trois cercles d'intersection de cette surface et de trois sphères quelconques passant par C ; deux points arbitraires P_1, P_2 pris sur la circonférence C' et les deux cercles C_1, C_2 répondent à la question.

Parmi les corollaires de cet important théorème, bornons-nous à remarquer, pour le moment, qu'il enseigne à déterminer le plan tangent en un point quelconque de la surface, au point P_1 par exemple. Il suffit, en effet, de mener en ce point les tangentes aux deux courbes planes que décrivent les points α_1, α_2 pour deux positions différentes du plan du cercle λ , problème que nous avons déjà appris à résoudre.

(*) M. Laguerre a déjà proposé, t. I, p. 101 du *Bulletin* de la Société, une autre solution.

(**) Surfaces du 4^e ordre ayant le cercle de l'infini par ligne double.

Seconde note sur la génération des cycliques ; par M. L. SALTEL.

(Séance du 14 avril 1875)

Dans une précédente communication, j'ai montré avec quelle facilité on peut décrire par points une cyclique Σ plane ou sphérique, lorsqu'on connaît l'un des systèmes de trois couples de points désignés par les lettres (A_1, B_1) , (A_2, B_2) , (A_3, B_3) , système de points que nous appellerons *associés*. L'objet de la note actuelle a pour but d'enseigner à déterminer, par la règle et le compas, l'un des systèmes de points, lorsqu'on définit la courbe par huit points $A_1, B_1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

LEMME I. — Décrire une cyclique Σ dans le cas particulier où les huit points $A_1, B_1, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont tels que les points $(A_1, B_1, 1, 2)$ sont sur un même cercle, ainsi que les points $(A_1, B_1, 3, 4)$.

Soient $5'$ le second point de rencontre des cercles $(1, 2, 5)$, $(3, 4, 5)$, et de même $6'$ le second point de rencontre des cercles $(1, 2, 6)$, $(3, 4, 6)$; les couples de points

$$(A_1, B_1), (5, 5'), (6, 6')$$

constituent un système de points *associés*.

LEMME II. — Décrire une cyclique passant par les sept points arbitraires $A_1, B_1, 1, 2, 3, 4, 5$.

Soient $3'$ le second point d'intersection des cercles $(A_1, B_1, 3)$, $(1, 2, 3)$, et de même $4'$ le second point d'intersection des cercles $(A_1, B_1, 4)$, $(1, 2, 4)$; soit en outre $5'$ le second point d'intersection des cercles $(3, 3', 5)$, $(4, 4', 5)$, les points

$$(A_1, B_1), (1, 2), (5, 5')$$

constituent un système de points *associés* à une cyclique Σ'_1 , passant par les sept points donnés, c'est-à-dire que l'on obtiendra les deux nouveaux points communs à cette courbe et à un cercle quelconque C_i , passant par (A_1, B_1) , en construisant, ce que nous avons appris à faire, les deux cercles passant respectivement par les points $(1, 2)$, $(5, 5')$ et par les deux mêmes points du cercle C_i ; désignons par μ_1, γ_1 les deux points ainsi obtenus.

REMARQUE I. — En faisant jouer à deux des points $(1, 2, 3, 4, 5)$, à l'exception de $(1, 2)$, le même rôle que ces deux derniers viennent de jouer dans la construction de la courbe Σ'_1 , on obtiendrait une nouvelle courbe Σ'_2 passant par les sept points donnés et qui couperait le cercle C_i en deux points μ_2, γ_2 , faciles à déterminer. Désignons par V le point de rencontre des droites $\mu_1\gamma_1, \mu_2\gamma_2$.

REMARQUE II. — Il est évident que *toutes* les cycliques passant par les sept points donnés $A_1, B_1, 1, 2, 3, 4, 5$ rencontrent le cercle C_i en deux points, en ligne droite avec le point V .

REMARQUE III. — En suivant la même marche pour les sept points $A_1, B, 1, 2, 3, 4, 6$, on obtiendrait, relativement au cercle C_1 , un second point V' en ligne droite avec les deux points d'intersection de ce cercle et de toutes les cycliques passant par ces sept points.

COROLLAIRE I. — Il est manifeste que la ligne droite VV' rencontre le cercle C_1 aux deux mêmes points que la cyclique *cherchée*, c'est-à-dire la cyclique passant par les huit points $A_1, B, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

COROLLAIRE II. — Le cercle C_1 passant par les deux points A_1, B_1 , on peut dire que nous venons de résoudre ce problème :

Une cyclique étant définie par huit points, trouver les deux nouveaux points d'intersection de cette courbe et d'un cercle quelconque passant par deux de ces huit points.

COROLLAIRE III. — En cherchant les nouvelles intersections (α_1, α_2) , (β_1, β_2) , de la cyclique définie par les huit points $A_1, A_2, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, avec deux cercles C_1, C_2 , passant par A_1, A_2 , et prenant deux des six points $1, 2, 3, 4, 5, 6$, les points $1, 2$, par exemple, on aura huit nouveaux points $A_1, A_2, \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, 1, 2$, définissant la courbe, et qui seront dans les mêmes conditions que les huit points du lemme I.

COROLLAIRE IV. — *Une cyclique étant définie par huit points $A_1, B, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, on peut toujours trouver un système de trois couples de points associés, parmi lesquels peuvent figurer deux des points donnés.*

C'est là le problème que nous nous étions proposé.
