BULLETIN DE LA S. M. F.

DE POLIGNAC

Sur une propriété du polynôme $(x^2-1)^n$

Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 19-27
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__19_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Sur une propriété du polynôme $(x^2 - 1)^n$; par M. C. DE POLIGNAC.

(Séance du 17 juin 1874)

Dans ce qui va suivre, il sera fait appel à une propriété connue du polynôme $(x^2 - 1)^n$ que je commence par rappeler.

Elle consiste dans la relation identique suivante

$$(1) \qquad n(n+1)\frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} = (x^2-1)\frac{d^{n+1}(x^2-1)^n}{dx^{n+1}}.$$

On la vérifiera aisément en la ramenant à une autre propriété bien connue du même polynôme à savoir que la $n^{\text{ème}}$ dérivée

$$y = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

satisfait identiquement à l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(2) \qquad (x^2-1)\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - n(n+1)y = 0.$$

En effet, en différentiant la relation (1), on tombera sur l'équation (2), dans laquelle on aurait fait $y = \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$, c'est-à-dire sur un résultat identiquement nul. La dérivée de (1) est donc identiquement nulle et comme les deux membres s'annulent pour $x = 1$ l'identité est démontrée.

J'aborde maintenant l'objet de cette étude. Posant, pour abréger,

$$x^2 - 1 = X,$$

je partirai de la relation identique

$$X^n \log\frac{x+1}{x-1} = 2(x^2-1)^n\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \ldots\right).$$

Supposant le second membre développé et mettant en évidence la partie entière $f(x)$, on aura

$$X^n \log\frac{x+1}{x-1} = f(x) + \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha'}{x^3} + \ldots.$$

Si l'on prend la dérivée des deux membres, observant que

$$\frac{d\log\frac{x+1}{x-1}}{dx} = -\frac{2}{x^2-1} = -\frac{2}{X},$$

on sera conduit à l'égalité

$$(X^n)' \log\frac{x+1}{x-1} - 2X^{n-1} = f'(x) - \frac{\alpha}{x^2} - \ldots;$$

et en continuant à prendre successivement les dérivées des deux membres, il est aisé de voir qu'on aura toujours une équation de la forme

$$(X^n)^{(h)} \log\frac{x+1}{x-1} + \varphi(x) = f^{(h)}(x) + \ldots,$$

dans laquelle $\varphi(x)$ désigne un polynôme entier, si $h < n$. Cela tient à ce que la dérivée de $\log\frac{x+1}{x-1}$ est $-\frac{2}{X}$ et que les dérivées de X^n contiennent X en facteur jusqu'à la $n-1^{\text{ème}}$ incluse.

Je poserai en général

$$\varphi(x) = e_{n,h};$$

la nécessité du double indice apparaîtra plus loin. De même, remplaçant $f^{(h)}(x)$ par $f_n^{(h)}$, je formerai le tableau suivant

$$
(3) \qquad \left\{
\begin{aligned}
&(X^n)\log\frac{x+1}{x-1} = f_n + \sigma,\\
&(X^n)'\log\frac{x+1}{x-1} + e_{n,1} = f'_n + \sigma',\\
&(X^n)''\log\frac{x+1}{x-1} + e_{n,2} = f''_n + \sigma'',\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&(X^n)^{(h)}\log\frac{x+1}{x-1} + e_{n,h} = f_n^{(h)} + \sigma^{(h)},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
&(X^n)^{(n)}\log\frac{x+1}{x-1} + E_n = F_n + \sigma^{(n)},
\end{aligned}
\right.
$$

écrivant pour abréger dans la dernière équation

$$e_{n,n} = E_n, \quad f_n^{(n)} = F_n.$$

Remarquons que si, dans le premier membre de chaque équation du tableau (3), on développait en série $\log\frac{x+1}{x-1}$, on devrait retrouver identiquement le second membre. En particulier, désignant par $\varepsilon_{n,h}$ la partie entière du produit $(X^n)^{(h)}\log\frac{x+1}{x-1}$, on aurait

$$(4) \qquad \varepsilon_{n,h} + e_{n,h} = f_n^{(h)}$$

et pour la dernière, écrivant encore $\varepsilon_{n,n} = \mathcal{E}_n$,

$$\mathcal{E}_n + E_n = F_n.$$

Or, je dis que l'on aura identiquement

$$-E_n = F_n;$$

si cela est, il en résultera

$$\mathcal{E}_n = 2F_n,$$

particularité qui pourra s'énoncer ainsi :

La partie entière du produit de la n^e dérivée de $(x^2-1)^n$ par la série logarithmique $\log\frac{x+1}{x-1}$ est le double de la n^e dérivée de la partie entière du produit de $(x^2-1)^n$ par la même série.

Pour démontrer ce fait, il sera commode d'introduire une nouvelle quantité v définie par la relation générale

$$v_{n,h} = e_{n,h} + f_n^{(h)},$$

d'où, conservant la même notation abrégée,

$$V_n = E_n + F_n.$$

La relation à démontrer s'exprimera donc par l'identité

$$V_n = 0.$$

Cette dernière résultera de l'examen de deux formes différentes qu'on peut donner à la quantité $v_{n,h}$. Remarquons d'abord qu'il résulte immédiatement du mode de formation du tableau (3) que

$$(5) \qquad e_{n,h+1} = e'_{n,h} - \frac{2(X^n)^{(h)}}{X};$$

d'ailleurs on peut écrire

$$f_n^{(h+1)} = \left(f_n^{(h)}\right)';$$

ajoutant, il vient

$$(6) \qquad v_{n,h+1} = v'_{n,h} - \frac{2(X^n)^{(h)}}{X}.$$

Il est important d'observer que les relations (5) et (6) subsistent pour $h > n$, bien que les polynômes e et v cessent d'être entiers.

Après avoir fait varier h, je ferai varier n, et je chercherai d'abord ce que devient $f_n^{(h)}$ quand n se change en $n+1$. On a par définition

$$X^n \log \frac{x+1}{x-1} = f_n + \frac{\alpha}{x} + \frac{\alpha'}{x^3} + \dots,$$

d'où

$$X^{n+1} \log \frac{x+1}{x-1} = Xf_n + \frac{\alpha X}{x} + \frac{\alpha' X}{x^3} + \dots = Xf_n + \alpha x + \frac{a}{x} + \dots.$$

Donc

$$f_{n+1} = Xf_n + \alpha x,$$

et par suite

$$f_{n+1}^{(h)} = (Xf_n)^{(h)} \quad \text{pour } h > 2.$$

Développant et observant que $X'' = 2$, il vient

$$(7) \qquad f_{n+1}^{(h)} = Xf_n^{(h)} + hX'f_n^{(h-1)} + h(h-1)f_n^{(h-2)}.$$

On aura une formule toute semblable pour $e_{n+1,h}$. En effet, on a par définition

$$\left(X^n \log \frac{x+1}{x-1}\right)^{(h)} = (X^n)^{(h)} \log \frac{x+1}{x-1} + e_{n,h};$$

d'ailleurs

$$X^{n+1}\log\frac{x+1}{x-1}=XX^n\log\frac{x+1}{x-1};$$

d'où

$$\left(X^{n+1}\log\frac{x+1}{x-1}\right)^{(h)}=X\left(X^n\log\frac{x+1}{x-1}\right)^{(h)}+hX'\left(X^n\log\frac{x+1}{x-1}\right)^{(h-1)}$$
$$+h(h-1)\left(X^n\log\frac{x+1}{x-1}\right)^{(h-2)};$$

ou bien

$$(X^{n+1})^{(h)}\log\frac{x+1}{x-1}+e_{n+1,h}=X\left[(X^n)^{(h)}\log\frac{x+1}{x-1}+e_{n,h}\right]$$
$$+hX'\left[(X^n)^{(h-1)}\log\frac{x+1}{x-1}+e_{n,h-1}\right]$$
$$+h(h-1)\left[(X^n)^{(h-2)}\log\frac{x+1}{x-1}+e_{n,h-2}\right];$$

d'où

$$(8)\qquad e_{n+1,h}=Xe_{n,h}+hX'e_{n,h-1}+h(h-1)e_{n,h-2}.$$

Ajoutant les relations (7) et (8), on obtient

$$(9)\qquad v_{n+1,h}=Xv_{n,h}+hX'v_{n,h-1}+h(h-1)v_{n,h-2}.$$

Avant d'aller plus loin, remarquons que les quantités f sont toujours entières. Les quantités e ne le sont que tant que le second indice ne dépasse pas le premier. Mais, d'après le développement même du calcul, la formule (8) subsiste sans restriction. La formule (7) n'a d'autre restriction que $h>1$. Il en est donc de même de la formule (9). En y faisant $h=n+1$, on obtient

$$V_{n+1}=Xv_{n,n+1}+(n+1)X'V_n+n(n+1)v_{n,n-1}.$$

Mais de la formule (6) on tire, pour $h=n$,

$$v_{n,n+1}=V'_n-\frac{2(X^n)^n}{X}.$$

On aura donc

$$(10)\qquad V_{n+1}=XV'_n+(n+1)X'V_n+n(n+1)v_{n,n-1}-2(X^n)^{(n)}.$$

Prenant la dérivée

$$V'_{n+1}=XV''_n+(n+2)X'V'_n+2(n+1)V_n+n(n+1)v'_{n,n-1}-2(X^n)^{(n+1)}.$$

Mais la relation (6) donne, pour $h=n-1$,

$$V_n=v'_{n,n-1}-\frac{2(X^n)^{(n-1)}}{X};$$

par conséquent

$$V'_{n+1} = XV''_n + (n+2)X'V'_n + (n+1)(n+2)V_n + 2\left[n(n+1)\frac{(X^n)^{(n-1)}}{X} - (X^n)^{(n+1)}\right].$$

Les deux derniers termes disparaissent en vertu de la relation fondamentale (1), qui dans la notation actuelle serait

$$n(n+1)(X^n)^{(n-1)} = X(X^n)^{(n+1)},$$

et il reste finalement

$$(11) \qquad V'_{n+1} = XV''_n + (n+2)X'V'_n + (n+1)(n+2)V_n.$$

Cette formule va nous mener au but que nous poursuivons, à savoir : de démontrer que toutes les quantités V sont identiquement nulles. Je remarque d'abord que si $V_n = 0$ identiquement, on aura identiquement aussi $V'_{n+1} = 0$. Donc, dans ce cas, V_{n+1} ne peut être qu'une constante, et je vais montrer que cette constante est nulle.

L'hypothèse $V_n = 0$ introduite dans la valeur générale de V_{n+1}, formule (10), donne

$$(11\,a) \qquad V_{n+1} = n(n+1)v_{n,n-1} - 2(X^n)^{(n)},$$

et comme V_{n+1} ne peut être qu'une constante, il suffira de démontrer que le second membre s'annule pour une valeur particulière de x; soit $x = 1$.

On peut écrire par définition

$$(12) \qquad V_{n+1} = n(n+1)\left(e_{n,n-1} + f_n^{(n-1)}\right) - 2\left(X^n\right)^{n)}.$$

Ici se place une remarque importante relativement aux quantités e.

Dans la formule (5)

$$e_{n,h+1} = e'_{n,h} - \frac{2(X^n)^{(h)}}{X},$$

le terme $\frac{(X^n)^{(h)}}{X}$ contient $n-h-1$ fois le facteur X. Il en sera donc de même de $e_{n,h+1}$, si $e'_{n,h}$ contient X le même nombre de fois. Mais, pour cela, il suffit que $e_{n,h}$ contienne $n-h$ fois X. Or

$$e_{n,h} = e'_{n,h-1} - \frac{2(X^n)^{(h-1)}}{X};$$

le second terme du second membre contient $n-h$ fois X, il suffira donc encore que $e_{n,h-1}$ le contienne $n-h+1$ fois et, en continuant ainsi, on ramènera la première condition à la seule question de savoir si $e_{n,1}$ contient $n-1$ fois le facteur X. C'est ce qui a lieu, puisque

$$e_{n,1} = -2X^{n-1}.$$

Donc, en général, $e_{n,h+1}$ contiendra $n-h-1$ fois le facteur X. Faisant $h=n-2$, on voit que $e_{n,n-1}$ contiendra une fois le facteur X ; $e_{n,n-1}$ s'annulera donc pour $x=1$. Par suite, on tire de (12), pour $x=1$,

$$V_{n+1}=n(n+1)f_n^{(n-1)}-2(X^n)^{(n)}.$$

D'ailleurs, conservant une notation antérieure,

$$\varepsilon_{n,n-1}+e_{n,n-1}=f_n^{(n-1)},$$

et, pour $x=1$,

$$\varepsilon_{n,n-1}=f_n^{(n-1)}.$$

On aura donc en définitive, pour $x=1$,

$$V_{n+1}=n(n+1)\varepsilon_{n,n-1}-2(X^n)^{(n)}.$$

Pour vérifier que le second membre est nul, il sera suffisant de supposer n pair. Car si n est impair, comme $\varepsilon_{n,n-1}$ et $(X^n)^{(n)}$ ne contiennent que des puissances impaires de x, ces deux quantités s'annuleront pour $x=0$. Soit donc n pair et posons

$$(X^n)^{(n-1)}=a_0x^{n+1}-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-3}\ldots+(-1)^pa_px^{n-(2p-1)}\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}}a_{\frac{n}{2}}x,$$

d'où

$$(X^n)^{(n)}=(n+1)a_0x^n-(n-1)a_1x^{n-2}+(n-3)a_2x^{n-4}$$
$$+\ldots+(-1)^p[n-(2p-1)]a_px^{n-2p}+\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}}a_{\frac{n}{2}},$$
$$(X^n)^{(n+1)}=n(n+1)a_0x^{n-1}-(n-1)(n-2)a_1x^{n-3}+(n-3)(n-4)a_2x^{n-5}$$
$$+\ldots+(-1)^p(n-2p+1)(n-2p)a_px^{n-2p-1}+\ldots+(-1)^{\frac{n}{2}-1}2.3a_{\frac{n}{2}-1}.$$

En développant l'identité

$$n(n+1)(X^n)^{(n-1)}=(x^2-1)(X^n)^{(n+1)},$$

on sera conduit aux équations suivantes :

$$\begin{aligned} n(n+1)a_0&=n(n+1)a_0 \quad &(-1)^0,\\ n(n+1)a_0+(n-1)(n-2)a_1&=n(n+1)a_1 \quad &(-1)^1,\\ (n-1)(n-2)a_1+(n-3)(n-4)a_2&=n(n+1)a_2 \quad &(-1)^2,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\ldots\ldots\\ (n-2p+3)(n-2p+2)a_{p-1}+(n-2p+1)(n-2p)a_p&=n(n+1)a_p \quad &(-1)^p. \end{aligned}$$

En les multipliant respectivement par les puissances de -1 placées en regard et ajoutant, on aura

$$(13)\qquad (-1)^p(n-2p+1)(n-2p)a_p=n(n+1)[a_0-a_1+a_2+\ldots+(-1)^pa_p].$$

Cette équation exprime précisément, comme on va voir, l'identité cherchée, c'est-à-dire

$$n(n+1)\varepsilon_{n,n-1} = 2(X^n)^{(n)}$$

pour $x = 1$.

En effet, on aura $\varepsilon_{n,n-1}$ en prenant la partie entière du produit

$$(X^n)^{(n-1)} \log \frac{x+1}{x-1},$$

c'est-à-dire de

$$[a_0 x^{n+1} - a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-3} + \dots (-1)^p a_p x^{n-2p+1} + \dots] 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots\right),$$

d'où résulte

$$x = 1, \quad \varepsilon_{n,n-1} = 2 \left\{ \begin{array}{l} a_0\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n+1}\right) \\ - a_1\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots + \frac{1}{n-1}\right) \\ + a_2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots + \frac{1}{n-3}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ + (-1)^p a_p\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots + \frac{1}{n-2p+1}\right) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ + (-1)^{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}}. \end{array} \right.$$

Mais comme $(X^n)^{(n-1)}$ contient encore le facteur X et par conséquent s'annule pour $x = 1$, on a identiquement

$$a_0 - a_1 + a_2 - \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} a_{\frac{n}{2}} = 0,$$

et il reste, introduisant le facteur $n\,(n+1)$,

$$(14) \quad \frac{n(n+1)}{2}\varepsilon_{n,n-1} = n(n+1) \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{3}(a_0 - a_1 + \dots + (-1)^{\frac{n}{2}-1} a_{\frac{n}{2}-1} \\ + \frac{1}{5}(a_0 - a_1 + \dots) \\ \dots\dots\dots\dots \\ + \frac{1}{n-2p+1}[a_0 - a_1 + \dots + (-1)^p a_p] \\ + \dots. \end{array} \right.$$

D'autre part, on a

$$x = 1, \quad (X^n)^{(n)} = (n+1)a_0 - (n-1)a_1 + (n-3)a_2 - \dots (-1)^p (n-2p+1)a_p + \dots,$$

et, en retranchant la quantité nulle $a_0 - a_1 + a_2 - \dots$, il reste

$$(15) \quad x = 1, \quad (X^n)^{(n)} = na_0 - (n-2)a_1 + (n-4)a_2 \dots + (-1)^p (n-2p)a_p + \dots.$$

Or, en égalant les termes généraux des équations (14) et (15), c'est-à-dire les coefficients de a'' et de $\frac{1}{n-2p+1}$, on tombe sur l'équation (13). Donc on a identiquement

$$n(n+1)\epsilon_{n,n-1} = 2(X^n)^{(n)} \text{ pour } x=1,$$

d'où résulte enfin

$$V_{n+1}=0,$$

si $V_n=0$ identiquement. Or ce résultat est facile à vérifier pour $n=2$; donc la proposition est générale.

En se reportant à l'équation (11 a), on voit qu'il résulte de l'analyse précédente que l'on a identiquement

$$2(X^n)^{(n)} = n(n+1)v_{n,n-1} = n(n+1)\left(e_{n,n-1} + f_n^{(n-1)}\right).$$

La $n^{\text{ème}}$ dérivée de $(x^2-1)^n$ jouit, comme on sait, d'une propriété caractéristique qui est de donner une approximation de la transcendante $\log\frac{x+1}{x-1}$ au moyen d'une fraction rationnelle dont elle est le dénominateur (*). En se reportant au tableau (3), on voit que le numérateur de cette fraction rationnelle n'est autre que $2F_n$. La dernière équation de ce tableau donne, ayant égard à la proposition démontrée,

$$(X^n)^{(n)} \log\frac{x+1}{x-1} = 2F_n + \sigma^{(n)},$$

$$\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{2F_n}{(X^n)^{(n)}} + \frac{\sigma^{(n)}}{(X^n)^{(n)}},$$

ou, en développant le second terme,

$$\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{2F_n}{(X^n)^{(n)}} + \frac{\alpha}{x^{2n+1}} + \frac{\alpha_1}{x^{2n+3}} + \dots,$$

équation dans laquelle $F_n = \frac{d^n f_n}{dx^n}$ c'est-à-dire la $n^{\text{ème}}$ dérivée de la partie entière du produit

$$(x^2-1)^n 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \dots\right).$$

Tous ces résultats s'appliqueront identiquement au produit

$$(x^2+1)^n \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}.$$

Il suffira de changer x en $x\sqrt{-1}$.

(*) La théorie en est exposée dans le *Cours d'analyse* de M. Hermite, p. 277.