BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques

Bulletin de la S. M. F., tome 3 (1875), p. 174-181

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1875__3__174_1>

Sur les polaires d'une droite relativement aux courbes et aux surfaces algébriques ; par M. LAGUERRE.

(Séance du 26 mai 1875)

I

1. Je m'appuierai, dans tout ce qui suit, sur la proposition suivante :

THÉORÈME I. — *Étant données un nombre quelconque de courbes* K, K,′ K″,... *et un lieu* C *défini par la condition qu'il y existe une relation, du reste arbitraire, entre les directions d'un certain nombre des tangentes que l'on peut mener aux courbes données par un point de ce lieu ; appelons* C_0 *le lieu que l'on obtient en remplaçant, dans la définition de la courbe* C, *la courbe* K *par les points de contact des tangentes qu'on peut lui mener par un point* M *du plan : cela posé, la droite polaire du point* M, *relativement à la courbe* C, *se confond avec la droite polaire du même point relativement à la courbe* C_0 (*).

Démonstration. — Soient

$$(1)\qquad U=(a,b,c,\ldots)=0,\quad U'=(a',b',c',\ldots)=0,\ldots$$

les équations mixtes des courbes K, K′, ..., et $V(a, b, \ldots; a', b', \ldots)=0$ l'équation cartésienne de la courbe C ; cherchons d'abord ce que devient cette équation quand on substitue à la courbe K les points de contact des tangentes menées à cette courbe par un point (x, y) du plan. Soit $\omega=ux+vy+wz=0$ l'équation d'une droite quelconque ; l'équation mixte de la première polaire relativement à K est (F. B. N° 3)

$$(2)\qquad uU_0-vU_1+\omega\Pi=0,$$

$\Pi=(\alpha,\beta,\gamma,\ldots)=0$ étant l'équation de la première polaire de la droite de l'infini ; si nous éliminons λ et μ entre les équations (1) et (2), nous obtiendrons l'équation cartésienne des tangentes menées à K aux points de rencontre de cette courbe avec la droite donnée ; si ensuite, en faisant pour abréger $X=\xi-x$, $Y=\eta-y$, et en considérant ξ et η comme les coordonnées courantes, nous remplaçons respectivement dans l'équation ainsi

(*) J'emploie ici les notations de mon *Mémoire sur l'application des formes binaires à la géométrie* (*Journ. de Math.*, 3e série, t. I).

obtenue u, v et ω par μ', $-\lambda'$ et $\lambda'Y-\mu'X$, nous aurons l'équation mixte des points de contact des tangentes menées du point (x, y) à la courbe K. Faisant d'abord la substitution indiquée dans l'équation (2), il vient

$$(2)' \qquad \lambda'\frac{dU}{dx}+\mu'\frac{dU}{dy}+n(\lambda'Y-\mu'X)\,\Pi(\lambda,\mu)=0,$$

et c'est entre cette équation et l'équation (1) que nous devons éliminer λ et μ ; comme nous avons à déterminer la droite polaire du point (ξ, η) relativement à C_0, j'observe d'abord que l'on peut négliger les puissances de X et de Y supérieures à la première. L'équation mixte des points de contact devient alors simplement, en supprimant les accents,

$$(3) \qquad U(\lambda,\mu)+n(\lambda Y-\mu X)\,\Pi(\lambda,\mu)=0,$$

ou encore

$$(a,b,c)+[n\alpha Y,(n-1)\beta Y-\alpha X,(n-2)\gamma Y-2\beta X,\ldots].$$

Il résulte de là que l'équation de la courbe C_0 s'obtiendra (en négligeant toujours les puissances de X et de Y supérieures à la première) en y remplaçant respectivement a, b, c, ... par $a+n\alpha Y$, $b+(n-1)\beta Y-\alpha X$, $c+(n-2)\gamma Y-2\beta X$, ..., et en substituant aux lettres x et y les lettres ξ, η dans les polynômes $a', b', \ldots, a'', b'', \ldots, \ldots$.

Désignant, pour un instant, les résultats de cette substitution par $A', B', \ldots, A'', B'', \ldots, \ldots$, l'équation de la courbe C_0 sera

$$V_1=V(a+n\alpha Y,\ldots;A',B',\ldots;A'',B'',\ldots)=0,$$

et l'équation de la droite polaire du point (x, y) relativement à C_0

$$\xi\left(\frac{dV_1}{d\xi}\right)+\eta\left(\frac{dV_1}{d\eta}\right)+\rho\left(\frac{dV_1}{d\rho}\right)=0,$$

les lettres ξ et η étant de nouveau remplacées par les lettres x et y dans les dérivées partielles.

On a évidemment

$$\left(\frac{dV_1}{d\xi}\right)=-\alpha\frac{dV}{db}-2\beta\frac{dV}{dx}-\ldots+\frac{dV}{da'}\frac{da'}{dx}+\ldots+\frac{dV}{da''}\frac{da''}{dx}+\ldots,$$

ou, en vertu de formules que j'ai données dans le mémoire déjà cité (F. B. N° 4),

$$\left(\frac{dV_1}{d\xi}\right)=\frac{dV}{da}\frac{da}{dx}+\frac{dV}{db}\frac{dV}{dx}+\ldots+\frac{dV}{da'}\frac{da'}{dx}+\ldots+\frac{dV}{da''}\frac{da''}{dx}+\ldots=\frac{dV}{dx}.$$

On démontrerait de même que $\left(\dfrac{dV_1}{d\eta}\right)=\dfrac{dV}{dy}$ et $\left(\dfrac{dV_1}{d\zeta}\right)=\dfrac{dV}{dz}$.

La proposition est donc complétement établie.

REMARQUE. — Dans la définition de la courbe C_0, on voit que la courbe K a été remplacée par un système de points; il est clair que l'on pourrait faire de même pour chacune des autres courbes K', K'',..., et même pour toutes ces courbes.

2. La proposition précédente permet de résoudre dans un grand nombre de cas intéressants le problème suivant qui comprend, en particulier, le problème de la construction de la tangente :

Étant donnée une courbe, construire la droite polaire d'un point du plan relativement à cette courbe.

Ainsi, la podaire d'une courbe K étant le lieu des points d'où l'on voit sous un angle droit cette courbe et un point fixe P, on a immédiatement la proposition suivante :

Étant donnée la podaire C *d'un point* P *relativement à une courbe* K, *la polaire* (*) *d'un point* M *du plan relativement à la podaire est la polaire du même point relativement aux divers cercles ayant pour diamètres les droites qui joignent le point* P *aux points de contact des tangentes menées du point* M *à la courbe* K.

Semblablement, une spirique A étant le lieu des points d'où l'on voit sous un angle donné α une conique B, on peut énoncer ce théorème :

La polaire d'un point M *relativement à la spirique* A *est la polaire de ce même point relativement aux deux cercles capables de l'angle donné et ayant pour corde commune la droite qui joint les points de contact des tangentes menées de* M *à la conique* B.

3. Les conséquences les plus importantes du théorème I sont contenues dans les propositions suivantes que j'ai déjà données dans une note *Sur quelques propriétés des courbes algébriques* (**).

THÉORÈME II. — *Étant données deux courbes quelconques* K^m *et* K^n, *de classe respectivement égale à* m *et à* n, *la polaire d'un point quelconque* M, *relativement aux* mn *tangentes communes à ces courbes, est la polaire du même point relativement aux* mn *droites qui joignent les points de contact des tangentes menées de* M *à* K^m *aux points de contact des tangentes menées du même point à* K^n.

THÉORÈME III (corrélatif du précédent). — *Étant données deux courbes quelconques* C^m *et* C^n, *d'ordre respectivement égal à* m *et à* n, *le pôle d'une droite quelconque, relativement aux* mn *points d'intersection de ces courbes, est le pôle de la même droite relativement aux* mn *points d'intersection des tangentes menées à* C^m *aux points où cette courbe rencontre la droite avec les tangentes menées à* C^n *en ses points de rencontre avec la droite.*

(*) Ici, comme dans la suite de cette note, j'appelle simplement *polaire* d'un point la *droite polaire* de ce point.

(**) *Comptes rendus de l'Acad. des sc.* (mai 1875).

THÉORÈME IV. — *La polaire d'un point quelconque relativement à une courbe de $n^{\text{ème}}$ classe est la polaire du même point relativement aux* $\frac{n(n-1)}{2}$ *droites qui joignent deux à deux les points de contact des tangentes que l'on peut mener du point à la courbe.*

REMARQUE. — Si la courbe a des tangentes d'inflexion et des tangentes doubles, ces droites doivent être considérées comme faisant partie de cette courbe, en comptant deux fois chaque tangente double, et trois fois chaque tangente d'inflexion.

THÉORÈME V (corrélatif du précédent). — *Le pôle d'une droite quelconque relativement à une courbe du $n^{\text{ème}}$ ordre est le pôle de la même droite relativement aux* $\frac{n(n-1)}{2}$ *points d'intersection des tangentes menées à la courbe aux points où elle est rencontrée par la droite.*

REMARQUE. — Si la courbe a des points doubles et des points de rebroussement, ces points doivent être considérés comme faisant partie de cette courbe, en comptant deux fois chaque point double et trois fois chaque point de rebroussement.

II

4. Considérons une courbe gauche quelconque K et une droite de l'espace Δ ; par cette droite, menons un plan quelconque et prenons le pôle de la droite relativement aux points d'intersection du plan et de la courbe ; lorsque le plan tourne autour de la droite, le lieu du pôle est une droite que j'appellerai la polaire de Δ relativement à la courbe gauche et que je désignerai par la notation $\Delta(K)$.

Poncelet a donné de belles propriétés de ces polaires (*) ; on voit immédiatement, par exemple, que la polaire d'une droite relativement à une courbe gauche est la polaire de cette droite relativement aux tangentes menées à cette courbe aux points où elle est coupée par un plan quelconque mené par la droite. Je ne crois pas que, jusqu'ici, on ait indiqué comment on peut déterminer la polaire d'une droite relativement à une courbe, lorsqu'au lieu de donner cette courbe on la définit comme l'intersection de deux surfaces. Je m'occuperai simplement ici du cas où la courbe est l'intersection complète de deux surfaces, les autres cas se ramenant évidemment à celui-là.

Du théorème III on déduit immédiatement la proposition suivante :

THÉORÈME VI. — *Une courbe gauche étant l'intersection complète de deux*

(*) *Propriétés projectives des figures. Section IV.* Poncelet, au lieu du mot *polaire*, emploie l'expression d'*axe des moyennes harmoniques*.

surfaces S *et* S', *la polaire d'une droite relativement à cette courbe est la polaire de cette même droite relativement aux diverses droites d'intersection des plans menés tangentiellement à* S *aux points où cette surface rencontre la droite avec les plans menés tangentiellement à* S' *aux points où la droite coupe cette surface.*

5. Considérons une surface quelconque Σ et une droite de l'espace Δ; par cette droite menons un plan quelconque et prenons le pôle de la droite relativement à la courbe d'intersection de la surface et du plan (la courbe étant considérée comme étant d'une classe donnée); lorsque le plan tourne autour de la droite, le pôle décrit une droite que j'appellerai la polaire de Δ, relativement à la surface et que je représenterai par la notation $\Delta(\Sigma)$.

Cette polaire peut être évidemment encore définie comme l'enveloppe des plans polaires des différents points de Δ relativement aux cônes circonscrits à Σ et ayant ces points pour sommets (ces cônes étant considérés comme d'un ordre donné).

Par suite, si la surface Σ ne comporte aucune singularité relativement à son ordre, c'est-à-dire n'a ni ligne double ni ligne de rebroussement, on déduit immédiatement du théorème V la proposition suivante :

Théorème VII. — *Si une surface du $n^{ème}$ ordre n'a aucune singularité, la polaire d'une droite relativement à cette surface est la polaire de cette droite relativement aux* $\frac{n(n-1)}{2}$ *droites suivant lesquelles se coupent les plans qui touchent la surface aux points où elle rencontre la droite.*

De même, si la surface Σ ne comporte aucune singularité relativement à sa classe, le théorème IV donne la proposition suivante corrélative de la précédente :

Théorème VIII. — *Si une surface de n^{eme} classe n'a aucune singularité, la polaire d'une droite relativement à cette surface est la polaire de la droite relativement aux* $\frac{n(n-1)}{2}$ *droites qui joignent deux à deux les points de contact des plans tangents que l'on peut mener à la surface par la droite donnée.*

6. En particulier, si l'on considère une surface développable G ayant pour arête de rebroussement une courbe gauche K et un point quelconque M de la droite Δ, le plan polaire de M, relativement à l'ensemble des plans osculateurs de la courbe qui passent par ce point, enveloppe, quand le point M se déplace sur la droite, la polaire de cette droite relativement à G.

Si la développable G est définie au moyen de deux surfaces inscrites S et S', on a le théorème suivant corrélatif du théorème VI :

Théorème IX. — *Une surface développable* G *étant la développable complète circonscrite à deux surfaces* S *et* S', *la polaire d'une droite relativement à cette développable est la polaire de cette droite relativement aux droites qui* *joignent chacun des points de contact des plans menés par la droite tangentiellement à S à chacun des points de contact des plans menés par la même droite tangentiellement à S'.*

7. En particulier, considérons une suite de surfaces homofocales du second ordre (Σ) inscrite dans la développable isotrope Γ.

Soient Σ et Σ' deux quelconques de ces surfaces; d'une droite Δ on peut leur mener quatre plans tangents, les droites qui joignent les points de contact sur l'une des surfaces avec les points de contact sur l'autre forment un quadrilatère gauche Q.

De ce qui précède, il résulte que :

La polaire de la droite Δ par rapport au quadrilatère Q (*) *est la même, quelles que soient les deux surfaces homofocales considérées, et se confond avec la polaire de cette même droite relativement à la développable isotrope circonscrite.*

En particulier, si la surface Σ' se réduit à l'ombilicale, la polaire de Δ se réduit à la polaire de cette droite relativement aux normales que l'on peut mener à Σ aux deux points où cette surface est touchée par les plans tangents qu'on peut lui mener par Δ. D'où cette conséquence :

Étant donné un système de surfaces homofocales du second ordre (Σ) *et une droite fixe Δ, si par Δ on mène les plans tangents à uue surface quelconque Σ du système et si l'on prend la polaire de Δ relativement aux normales qu'on peut mener à Σ aux deux points de contact, la polaire de Δ relativement à ces normales est la même quelle que soit la surface du système que l'on considère et elle se confond avec la polaire relativement à la développable isotrope circonscrite au système* (**).

III

8. Les deux théorèmes généraux VII et VIII s'appliquent, avec quelques modifications, à toute surface donnée, en sorte qu'ils fournissent en réalité deux moyens distincts de construire la polaire d'une droite donnée relativement à cette surface. Il serait facile d'énoncer à ce sujet les propositions générales, mais je crois inutile de le faire et je me contenterai d'énoncer les résultats relatifs à deux surfaces particulières des plus simples.

(*) Ce quadrilatère Q jouit encore de plusieurs autres propriétés intéressantes; ainsi *la somme de deux de ses côtés contigus est égale à la somme des deux autres.* (Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace, *Nouv. Ann. de Math.*, 1872.)

(**) Cette proposition s'étend évidemment à un système de surfaces homofocales quelconques; on peut la considérer comme l'extension à l'espace de ce théorème que j'ai donné depuis longtemps :

Le centre harmonique d'un point, par rapport aux points de contact des tangentes qu'on peut mener de ce point à une courbe de $n^{ème}$ classe, est le centre harmonique du même point relativement aux n foyers de la courbe.

Considérons, en premier lieu, une cubique gauche K et la développable du $4^{ème}$ ordre G dont elle est l'arête de rebroussement; soient $\Delta(K)$ et $\Delta(G)$ les polaires d'une même droite Δ relativement à la courbe gauche et à la développable (Cff. N° 4 et N° 6).

Si, d'un point quelconque M de la droite Δ, on mène le cône contenant la courbe K, ce cône est du $3^{ème}$ degré et de la $4^{ème}$ classe; il a trois plans d'inflexion, qui sont les plans osculateurs que l'on peut mener à K par le point M. Le plan polaire de M relativement à ce cône contient la polaire $\Delta(K)$; du théorème IV et des considérations ci-dessus développées (N° 6) résulte la proposition suivante :

Théorème X. — *En désignant par t l'ensemble des* 6 *droites qui joignent deux à deux les* 4 *points de la courbe* K, *dont les tangentes s'appuient sur* Δ, *on a la relation*

$$2\Delta(t) = \Delta(K) + 3\Delta(G).$$

9. Concevons maintenant que, par la droite Δ, on mène un plan quelconque; il coupe la surface G suivant une courbe du $4^{ème}$ ordre et de la $3^{ème}$ classe ayant pour point de rebroussement ses trois points de rebroussement sur K. Le pôle de Δ relativement à cette courbe est sur $\Delta(G)$; du théorème V résulte la proposition suivante :

Théorème XI. — *En désignant par* T *l'ensemble des* 6 *droites suivant lesquelles se coupent les plans osculateurs menés aux points de* K, *dont les tangentes s'appuient sur* Δ, *on a*

$$2\Delta(T) = \Delta(G) + 3\Delta(K).$$

Remarque. — On déduit de là

$$4\Delta(G) = 3\Delta(t) - \Delta(T)$$

et

$$4\Delta(K) = 3\Delta(T) - \Delta(t);$$

on voit que les polaires d'une droite relativement à K et à G sont déterminées quand on connaît les quatre tangentes à la courbe qui la rencontrent. Par suite :

Deux droites Δ *et* Δ', *conjuguées par rapport à la cubique gauche* K *ont mêmes polaires relativement à cette cubique, et relativement à la développable dont elle est l'arête de rebroussement.*

Ces deux polaires sont également conjuguées par rapport à la cubique.

10. Considérons en second lieu une surface réglée S du $3^{ème}$ ordre (et par conséquent de $3^{ème}$ classe) ; appelons D la directrice double de cette surface et D' la seconde directrice rectiligne; on sait que tout plan passant par D' est doublement tangent à la surface.

Cela posé, soient Δ une droite quelconque de l'espace et $\Delta(S)$ sa polaire relativement à S ; si l'on mène par Δ un plan quelconque, il coupe S suivant une courbe du 3ème ordre et de la 4ème classe, ayant pour point double le point de rencontre de ce plan avec D. Du théorème IV, on déduit la proposition suivante :

Théorème XII. — *En désignant par t le triangle formé par les points de contact des plans tangents que l'on peut mener à* S *par la droite* Δ, *on a*

$$2\Delta(t) = \Delta(S) + 2\Delta(D).$$

11. Prenons maintenant un point quelconque M sur la droite Δ et imaginons le cône circonscrit à la surface et ayant ce point pour sommet; ce cône est de la 3ème classe et du 4ème ordre, il a pour plan double le plan mené par le point M et par la droite D'.

Du théorème V résulte donc la proposition suivante :

Théorème XIII. — *En désignant par* T *les arêtes du trièdre formé par les plans menés tangentiellement à* S *en ses points de rencontre avec* Δ, *on a*

$$2\Delta(T) = \Delta(S) + 2\Delta(D').$$

Des deux relations précédentes, on déduit

$$\Delta(T) + \Delta(D) = \Delta(t) + \Delta(D'),$$

identité sur laquelle je reviendrai plus tard.