G. HALPHEN

Sur le déplacement d'un solide invariable

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 56-62
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__56_1>

Sur le déplacement d'un solide invariable; par M. Halphen.

(Séance du 23 juillet 1873)

Le nombre des conditions nécessaires pour déterminer la position, dans l'espace, d'un solide donné, étant six, l'étude des déplacements d'un solide peut être partagée en six cas distincts, suivant que ce corps est assujetti à cinq, quatre, ..., une condition, ou est entièrement libre.

Le cas où les conditions sont au nombre de cinq a donné lieu à une théorie trop connue pour qu'il soit utile d'en rappeler ici les résultats. Les cas où les conditions sont au nombre de quatre ou de trois ont donné lieu à d'élégants théorèmes dus à M. Mannheim, et sur lesquels je vais revenir. Je donne ici des théorèmes analogues pour les autres cas, en suivant une marche uniforme qui s'applique également à tous, à l'exception du premier.

Rappelons d'abord un résultat bien connu. Soient, dans un solide de position donnée, x, y, z, et ξ, η, ζ les coordonnées de deux points de ce corps relativement à des axes rectangulaires fixes dans l'espace, le premier point étant considéré comme variable et le second comme fixe dans le corps. Soit t_1 une variable dont dépend la position du corps. Si on écarte le solide infiniment peu de sa position, en faisant varier t_1, on a

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{dx}{dt_1} &= \frac{d\xi}{dt_1} + c_1(y-\eta) - b_1(z-\zeta),\\ \frac{dy}{dt_1} &= \frac{d\eta}{dt_1} + a_1(z-\zeta) - c_1(x-\xi),\\ \frac{dz}{dt_1} &= \frac{d\zeta}{dt_1} + b_1(x-\xi) - a_1(y-\eta). \end{aligned}$$

Dans ces relations, a_1, b_1, c_1 sont des constantes relativement au point (x, y, z) considéré. Les trois plans, représentés par les équations obtenues en égalant à zéro les trois dérivées $\frac{dx}{dt_1}, \frac{dy}{dt_1}, \frac{dz}{dt_1}$, sont parallèles à la droite $\frac{x}{a_1} = \frac{y}{b_1} = \frac{z}{c_1}$. Il n'y a donc pas de point commun à ces plans. Par suite, dans le mouvement imprimé au corps, aucun point n'est immobile. Admettons maintenant que la position du corps dépende d'autres variables, t_2, t_3, ... En faisant varier séparément chacune d'elles, on obtiendra des relations analogues aux relations (1), que nous figurerons en affectant, dans les relations (1), les constantes a, b, c du même indice que la variable correspondante. Si d'ailleurs on fait varier simultanément les différentes variables, on a

$$dx = \frac{dx}{dt_1} dt_1 + \frac{dx}{dt_2} dt_2 + \frac{dx}{dt_3} dt_3 + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En posant donc

$$\begin{aligned} a_1 dt_1 + a_2 dt_2 + a_3 dt_3 + \ldots &= \mathrm{A}, \\ b_1 dt_1 + b_2 dt_2 + b_3 dt_3 + \ldots &= \mathrm{B}, \\ c_1 dt_1 + c_2 dt_2 + c_3 dt_3 + \ldots &= \mathrm{C}, \end{aligned}$$

on aura

$$(2) \qquad \begin{aligned} dx &= d\xi + \mathrm{C}(y - \eta) - \mathrm{B}(z - \zeta), \\ dy &= d\eta + \mathrm{A}(z - \zeta) - \mathrm{C}(x - \xi), \\ dz &= d\zeta + \mathrm{B}(x - \xi) - \mathrm{A}(y - \eta). \end{aligned}$$

Les trois plans, dont on obtient les équations en égalant à zéro ces trois différentielles, sont parallèles à la droite $\frac{x}{\mathrm{A}} = \frac{y}{\mathrm{B}} = \frac{z}{\mathrm{C}}$. Par suite, comme précédemment, aucun point n'est immobile. Mais si l'on choisit les variations de t_1, t_2, t_3,... de manière à vérifier l'équation

$$(3) \qquad \mathrm{A}d\xi + \mathrm{B}d\eta + \mathrm{C}d\zeta = 0,$$

ces trois plans se coupent suivant une même droite dont tous les points sont alors immobiles.

Quand les variables sont au nombre de deux, l'équation (3) détermine le rapport qui doit exister entre dt_1 et dt_2 pour que cette condition soit satisfaite. Or l'équation (3) est du deuxième degré relativement à $\frac{dt_1}{dt_2}$. On peut donc satisfaire à la condition d'immobilité d'une droite de deux manières. Quand les variables sont en nombre supérieur à deux, l'équation (3) a lieu entre plusieurs inconnues, et admet une infinité de systèmes de solutions. En résumé, dès que le nombre n des variables surpasse l'unité, il est toujours possible de trouver des systèmes $(\omega_1^1, \omega_2^1, \ldots, \omega_n^1)$, $(\omega_1^2, \omega_2^2, \ldots, \omega_n^2)$,..., $(\omega_1^n, \omega_2^n, \ldots, \omega_n^n)$ de n nombres chacun, et au nombre de n, tels qu'en faisant

$$\frac{dt_1}{\omega_1^i} = \frac{dt_2}{\omega_2^i} = \ldots = \frac{dt_n}{\omega_n^i},$$

une droite du solide reste immobile.

Substituons maintenant aux variables $t_1, t_2, \ldots, t_n$ les variables $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$, définies par les relations linéaires

$$\theta_1 = \begin{vmatrix} t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \ldots & \omega_n^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \ldots & \omega_n^3 \\ . & . & . & . \\ \omega_1^n & \omega_2^n & \ldots & \omega_n^n \end{vmatrix}, \quad \theta_2 = \begin{vmatrix} \omega_1^1 & \omega_2^1 & \ldots & \omega_n^1 \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \ldots & \omega_n^3 \\ . & . & . & . \\ \omega_1^n & \omega_2^n & \ldots & \omega_n^n \end{vmatrix}, \ldots, \theta_n = \begin{vmatrix} \omega_1^1 & \omega_2^1 & \ldots & \omega_n^1 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \ldots & \omega_n^2 \\ \omega_1^3 & \omega_2^3 & \ldots & \omega_n^3 \\ . & . & . & . \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{vmatrix};$$

on obtiendra le mouvement le plus général du solide en faisant varier successivement $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$. Or, si l'on suppose nulles les différentielles de toutes ces variables, à l'exception de celle de θ_i, on en conclut

$$\frac{dt_1}{\omega_1^i} = \frac{dt_2}{\omega_2^i} = \ldots = \frac{dt_n}{\omega_n^i};$$

c'est-à-dire qu'une droite du corps est immobile. Ainsi le déplacement le plus général du corps s'obtient par n rotations arbitraires autour de n droites restant les mêmes.

Appliquons maintenant ces résultats aux différents cas. S'il y a deux variables seulement, les deux axes de rotation sont déterminés par l'équation (3). Donc :

Théorème I. — *Tous les déplacements d'un solide assujetti à quatre conditions s'obtiennent par deux rotations autour de deux droites déterminées.*

Ce théorème est dû à M. Mannheim (*Étude sur le déplacement d'une figure de forme invariable*, p. 32). On en conclut que *les points de ces deux axes décrivent des éléments de lignes, tandis que les autres points décrivent des éléments de surfaces.*

Ce corollaire peut facilement être démontré directement par le calcul. Pour faciliter l'écriture, j'emploierai, dans la suite, la notation suivante : $u, v, \ldots, w$ étant n fonctions de $t_1, t_2, \ldots, t_n$, je représenterai par $(u_1\, v_2 \ldots w_n)$ le déterminant

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dt_1} & \frac{du}{dt_2} & \ldots & \frac{du}{dt_n} \\ \frac{dv}{dt_1} & \frac{dv}{dt_2} & \ldots & \frac{dv}{dt_n} \\ . & . & . & . \\ \frac{dw}{dt_1} & \frac{dw}{dt_2} & \ldots & \frac{dw}{dt_n} \end{vmatrix}$$

Cela posé, dans le cas de deux variables, les points des deux axes sont ceux dont les coordonnées, mises pour x, y, z dans les équations $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, ou

$$\frac{dx}{dt_1} dt_1 + \frac{dx}{dt_2} dt_2 = 0,$$
$$\frac{dy}{dt_1} dt_1 + \frac{dy}{dt_2} dt_2 = 0,$$
$$\frac{dz}{dt_1} dt_1 + \frac{dz}{dt_2} dt_2 = 0,$$

rendent ces équations possibles, en y considérant $\frac{dt_1}{dt_2}$ comme inconnue. Par suite, les coordonnées des points des axes satisfont aux équations simultanées : $(x_1\, y_2) = 0$, $(y_1\, z_2) = 0$, $(z_1\, x_2) = 0$. Il est facile de vérifier qu'en effet les paraboloïdes représentés par ces trois équations se coupent suivant les deux droites définies ci-dessus. Considérons maintenant l'un de ces paraboloïdes, le premier, par exemple, qui a pour plan directeur le plan des xy ; menons, par chaque point M du corps, une parallèle à une droite fixe, et soient p, p' les deux points où cette parallèle rencontre le paraboloïde. Les produits $Mp.Mp'$ sont proportionnels aux valeurs du déterminant $(x_1\, y_2)$, où l'on met, pour x, y, z, les coordonnées de chaque point M. D'ailleurs, $dt\, dt_1\, (x_1\, y_2)$ est la projection, sur le plan des $x\,y$, de l'élément de surface décrit par le point M. On a donc ce théorème, qui comprend le corollaire ci-dessus :

Théorème II. — *Les projections, sur un plan donné, des éléments superficiels, décrits par les points du corps, sont proportionnelles aux produits des segments interceptés, sur des sécantes parallèles issues de ces points, par un paraboloïde passant par les deux axes, et ayant le plan donné pour plan directeur.*

Supposons maintenant qu'il y ait trois variables. Dans ce cas, on peut, par l'équation (3), déterminer trois axes, dont chacun renferme une arbitraire. Ces axes forment donc une surface gauche, dont on obtient facilement l'équation comme ci-dessus, en remarquant que les coordonnées de chacun de ses points rendent possibles les trois équations simultanées : $dx = 0$, $dy = 0$, $dz = 0$, qui ne renferment que deux inconnues $\frac{dt_1}{dt_2}$, $\frac{dt_1}{dt_3}$. L'équation de cette surface est donc : $(x_1\; y_2\; z_3) = 0$. En effectuant les calculs, on s'apercevra que cette équation s'abaisse au deuxième degré. On peut aussi s'assurer de cet abaissement, en remarquant que le déterminant $(x_1 y_2 z_3)$, multiplié par $dt_1\, dt_2\, dt_3$, représente l'élément de volume décrit par le point dont les coordonnées sont x, y, z. Si l'on suppose que les conditions données soient la fixité d'un point, chaque point du corps décrit seulement un élément superficiel. Par suite, le déterminant ci-dessus est nul, si toutes les dérivées partielles de ξ, η, ζ s'annulent. Or, par cet évanouissement, ce déterminant se réduit aux termes du troisième degré en $x-\xi$, $y-\eta$, $z-\xi$, et il n'a disparu que des termes de degré inférieur à 3. Donc les premiers sont toujours nuls. Ainsi $(x_1 y_2 z_3)=0$ est un hyperboloïde dont chaque génératrice peut être prise pour un des trois axes de rotation. Donc :

THÉORÈME IV. — *Tous les déplacements d'un solide assujetti à trois conditions s'obtiennent par trois rotations autour de trois mêmes droites prises arbitrairement parmi les génératrices d'un hyperboloïde. Les points de cet hyperboloïde décrivent des éléments superficiels.*

Ce théorème a été énoncé par M. Mannheim (*loc. cit.*, p. 37). Mais la démonstration donnée par cet auteur ne s'applique qu'au cas où les trois conditions sont de nature à être ramenées chacune au mouvement d'un point sur une surface. D'après ce qui vient d'être dit, il y a toujours, dans un corps assujetti à trois conditions, une infinité de points qui se meuvent sur des surfaces. Le mouvement peut donc être défini par celui de trois de ces points ; mais cette propriété n'est pas évidente *a priori*. Comme plus haut, on peut encore dire que :

THÉORÈME V. — *Les volumes décrits par les points du corps sont proportionnels aux produits des segments interceptés sur des sécantes parallèles, issues de ces points, par l'hyperboloïde des axes.*

Supposons actuellement qu'il y ait quatre variables. L'équation (3) laisse subsister deux arbitraires pour la détermination de chaque axe de rotation. Ces droites forment donc une congruence. Pour trouver celles qui passent par un point donné, il suffit de déterminer les rapports de dt_1, dt_2, dt_3, dt_4 par les équations simultanées $dx=0$, $dy=0$, $dz=0$, où x, y, z sont les coordonnées du point donné. On a ainsi trois équations linéaires. Donc, *par un point passe une droite de la congruence*. On trouvera aussi facilement qu'*il y a une droite de la congruence dans un plan donné.* Par suite, les droites de la congruence rencontrent deux droites fixes. J'admets ici la connaissance de cette propriété de la congruence d'ordre et de classe 1. Il est d'ailleurs bien facile de montrer directement ici que les droites ci-dessus rencontrent deux droites fixes.

En effet, les droites de la congruence sont indéterminées si on les astreint à passer par un point dont les coordonnées annulent à la fois les quatre déterminants

$$(x_1y_2z_3),\ (x_2y_3z_4),\ (x_3y_4z_1),\ (x_4y_1z_2).$$

Chacun de ces déterminants égalé à zéro représente un hyperboloïde, d'après une remarque faite plus haut. Remarquons maintenant que les deux droites communes aux trois paraboloïdes obtenus en égalant à zéro (x_1y_2), (y_1z_2), $(z_1\,x_2)$ appartiennent à deux de ces hyperboloïdes, savoir : $(x_1\,y_2\,z_3)=0$ et $(x_4\,y_1z_2)=0$. Désignons ces deux droites par (1, 2) et (1, 2)$'$. Nous avons six pareils couples de deux droites : (2, 3) et (2, 3)′, (3, 4) et (3, 4)′, etc. Les deux hyperboloïdes $(x_1\, y_2\, z_3) = 0$ et $(x_4\, y_1\, z_2) = 0$ se coupent suivant deux autres droites qui rencontrent *dix* des douze droites ci-dessus. Il en résulte que ces deux droites appartiennent aux deux autres hyperboloïdes. Ainsi les quatre hyperboloïdes ont deux droites communes, et ces droites sont rencontrées par tous les axes. On voit immédiatement que la propriété des points de ces deux droites, de faire évanouir à la fois les quatre déterminants ci-dessus, peut être interprétée en disant que ces points décrivent des volumes nuls. Il est évident, en effet, que ces droites sont normales à tous les déplacements de leurs points. Par conséquent, ces points décrivent des éléments superficiels. On peut donc dire que :

Théorème VI. — *Tous les déplacements d'un solide assujetti à deux conditions s'obtiennent par quatre rotations autour de quatre mêmes droites prises arbitrairement parmi celles qui rencontrent deux droites déterminées. Les points de ces deux dernières droites décrivent des éléments superficiels.*

S'il y a cinq variables, l'équation (3) laisse subsister, dans chaque axe de rotation, trois arbitraires. Ces droites forment un complexe. Cherchons celles de ces droites qui passent par un point (x, y, z) et sont dans un plan contenant ce point :

$$M(X - x) + N(Y - y) + P(Z - z) = 0.$$

La condition que la droite passe par le point donné fournit, comme précédemment, trois équations linéaires et homogènes entre les cinq différentielles dt. On exprimera que la droite est, en outre, contenue dans le plan donné par l'équation :

$$MA + NB + PC = 0,$$

qui est aussi linéaire et homogène. Par suite, il y a une droite satisfaisant aux conditions données. Donc :

Théorème VII. — *Tous les déplacements d'un solide assujetti à une condition s'obtiennent par cinq rotations autour de cinq mêmes droites, prises arbitrairement dans un complexe linéaire déterminé.*

Si la condition donnée est celle du mouvement d'un point sur une surface, le complexe est formé des droites qui rencontrent la normale à cette surface, et les points de cette normale décrivent des éléments superficiels. Mais ce fait ne se produit pas en général. On verra sans peine qu'il faut et qu'il suffit, pour qu'il se produise, qu'il y ait une droite commune aux dix hyperboloïdes obtenus en égalant à zéro les dix déterminants $(x_i\, y_j\, z_k)$, où les nombres i, j, k sont 1, 2, 3, 4 ou 5.

Enfin, s'il y a six variables, on parvient immédiatement à ce théorème :

Théorème VIII. — *Tous les déplacements d'un solide libre s'obtiennent par six rotations autour de six mêmes droites prises arbitrairement.*

En terminant cette note, je ferai remarquer que l'on peut parvenir rapidement aux résultats qu'elle renferme, en faisant usage de deux théorèmes que j'ai communiqués à l'Académie des sciences en 1871 et en 1872, et que j'ai déjà eu l'occasion de signaler à notre Société. Ces théorèmes sont relatifs aux droites communes à des complexes ou des congruences données. On en déduit immédiatement, dans les cas les plus simples : 1° que l'ordre et la classe de la congruence formée par les droites communes à deux complexes linéaires sont l'unité, ce qui d'ailleurs est évident *a priori;* on en conclut aisément que cette congruence est formée par les droites rencontrant deux droites fixes; 2° que les droites communes à trois complexes linéaires forment un hyperboloïde; 3° que les droites communes à quatre complexes linéaires sont au nombre de *deux.*

Remarquons maintenant que, pour un déplacement dépendant d'une seule variable, les droites normales aux déplacements de leurs points forment un complexe linéaire. En prenant ce point de départ, dû à M. Chasles, nous en concluons que, pour les déplacements dépendant de deux variables, les droites normales aux déplacements de leurs points sont les droites communes à deux complexes linéaires. Elles rencontrent donc deux droites fixes, ce qui est le théorème de M. Mannheim. Pour les déplacements dépendant de trois variables, les droites normales aux déplacements de leurs points sont les droites communes à trois complexes linéaires. Ces droites forment donc un hyperboloïde. C'est le théorème IV, ou, du moins, la seconde partie de ce théorème, d'où l'on peut déduire la première. Pour les déplacements dépendant de quatre variables, on a de même deux droites normales à tous les déplacements de leurs points. C'est la seconde partie du théorème VI. J'ajoute que cette théorie pourrait facilement être faite par la considération de la composition des rotations; mais je me borne à cette simple indication.