G. HALPHEN

Recherches de géométrie à *n* dimensions

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 34-52
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__34_0>

Recherches de géométrie à n *dimensions*, par M. Halphen.

(Séance du 25 juin 1873)

1. Si une surface contient un point multiple d'ordre inférieur d'une unité à son degré, les droites issues de ce point la rencontrent en un seul autre point. A cause de cette propriété, M. Cayley a donné à une telle surface le nom de *monoïde*. Ce géomètre a montré que la considération des monoïdes pouvait être très-utile pour la classification des courbes gauches; il en a déduit la classification des courbes du 3e, 4e et 5e degré (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LIV, p. 55, 396, 672 et t. LVIII, p. 994). M. Ed. Weyr en a déduit la classification des courbes du 6e degré (*ibid.*, t. LXVI). J'ai fait aussi usage de ces surfaces dans un mémoire sur la théorie des courbes gauches, présenté à l'Académie en 1870.

En supposant le point multiple à l'infini sur l'axe Oz, on obtient l'équation d'une surface monoïde de degré p, sous la forme $vz-u=0$, où u et v sont des polynomes en x et y, de degrés p et $p-1$. Je me propose ici de développer quelques considérations au sujet d'équations analogues entre des variables en nombre supérieur à 3. Pour faciliter le langage, je demanderai qu'il me soit permis d'employer une expression que je vais indiquer. Le nombre des variables étant n, ou, si l'on veut, dans un espace à n dimensions, je nommerai *complexe d'ordre* i l'ensemble des systèmes de valeurs des variables, ou l'ensemble des points, qui satisfont à i conditions; et *intersection de deux complexes* d'ordres i et i', le complexe d'ordre $i+i'$ défini par la simultanéité des conditions qui définissent les premiers complexes. Si $i+i'$ est égal à n, l'intersection se réduit à un nombre fini de points. Le *degré* d'un complexe du 1er ordre est le degré de l'équation qui le définit. Le *degré* d'un complexe d'ordre i est le nombre de ses intersections avec le complexe défini par $n-i$ équations du 1er degré, qui, d'après cette définition même, est un complexe d'ordre $n-i$, du 1er degré. On peut conserver l'expression de *degré* d'un complexe d'ordre i quand i est égal au nombre n des variables. C'est alors le nombre de points que ce complexe représente.

De même que l'intersection complète de deux surfaces peut se décomposer en plusieurs courbes distinctes, de même aussi l'intersection complète de deux complexes peut se décomposer en plusieurs complexes distincts. En sorte qu'un complexe d'ordre i peut ne pas être représenté seul par i équations quelconques entre les n variables. Mais s'il s'agit d'un complexe, intersection complète de i complexes du 1er ordre, il est clair que son degré est égal au produit des degrés de ceux-ci. Dans cet ordre d'idées, les variables étant $x_1, x_2, \ldots, x_n$, l'équation $vx_n-u=0$, où u et v sont des polynomes de degrés p et $p-1$ ne contenant pas x_n, représente un complexe de 1^{er} ordre, de degré p, que l'on peut appeler *monoïde.*

Ces définitions établies, je vais étendre à un espace à n dimensions un théorème que j'ai démontré dans un autre travail (Même *Bulletin*, t. I, p. 133), et relatif aux intersections des courbes planes. Voici ce théorème :

Théorème I. — *Le nombre des intersections de deux courbes réunies en un point* O *est égal à la somme des ordres des segments infiniment petits interceptés par les deux courbes sur une sécante arbitraire dont la distance au point* O *est infiniment petite du premier ordre.*

Je vais d'abord donner à ce théorème une autre forme. Soit $f(x,y)=0$ l'équation d'une courbe, et ξ, η, ξ_1, η_1 les coordonnées de deux points M,M du plan, par où l'on mène deux sécantes parallèles, rencontrant respectivement la courbe aux points m, m', ... et m_1,m'_1, ... On sait qu'on a

$$\frac{\mathrm{M}m\,.\,\mathrm{M}m'\ldots}{\mathrm{M}_1m_1\,.\,\mathrm{M}_1m'_1\ldots}=\frac{f(\xi,\eta)}{f(\xi_1,\eta_1)};$$

en sorte que si l'on suppose fixé le point M_1 et la direction de la sécante, le produit $\mathrm{M}m.\mathrm{M}m'$ ..., pour un point arbitraire M, est proportionnel à $f(\xi,\eta)$.

Soit maintenant une autre courbe $\varphi=0$, rencontrant la courbe f en un point O, où les deux courbes peuvent avoir des branches multiples quelconques, ayant entre elles des contacts quelconques. Plaçons le point M sur une des branches de φ, à distance infiniment petite du 1^{er} ordre de O. La quantité $f(\xi,\eta)$ est infiniment petite, et son ordre est égal à la somme des ordres des segments interceptés à partir de M, sur une sécante arbitraire, par la courbe f. Si l'on place successivement le point M, de la même manière, sur les différentes branches de la courbe φ, la somme des ordres des quantités $f(\xi,\eta)$ sera celle des ordres des segments interceptés par les deux courbes sur une sécante à distance infiniment petite du premier ordre de O. Donc :

Théorème II. — *Le nombre des intersections des deux courbes* $f(x,y)=0$, $\varphi(x,y)=0$, *confondues en un point* O, *est égal à la somme des ordres des quantités* $f(x,y)$, *quand le point* (x,y) *est placé successivement sur les différentes branches de la courbe* $\varphi=0$, *à distance infiniment petite du* 1^{er} *ordre du point* O.

Soit maintenant un complexe du 1^{er} ordre à n variables $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0$, et cherchons la signification de l'expression $f(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$, quand $\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n$ sont les coordonnées d'un point quelconque. Par ce point, menons arbitrairement $n-2$ complexes du 1^{er} ordre et du 1^{er} degré, qu'on peut réduire à ne contenir chacun que 3 coordonnées :

$$(1)\qquad\left\{\begin{array}{l} x_3-\xi_3=\mathrm{A}_3(x_1-\xi_1)+\mathrm{B}_3(x_2-\xi_2),\\ x_4-\xi_4=\mathrm{A}_4(x_1-\xi_1)+\mathrm{B}_4(x_2-\xi_2),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ x_n-\xi_n=\mathrm{A}_n(x_1-\xi_1)+\mathrm{B}_n(x_2-\xi_2). \end{array}\right.$$

En substituant les valeurs de $x_3, \ldots, x_n$, tirées de ces formules, dans $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, on obtient une relation entre x_1 et x_2 : $F(x_1, x_2) = 0$. Mais, si l'on fait $x_1 = \xi_1$ et $x_2 = \xi_2$, les équations (1) montrent que l'on a aussi $x_3 = \xi_3, \ldots, x_n = \xi_n$. Donc $F(\xi_1, \xi_2)$ n'est autre chose que $f(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Soit maintenant un autre complexe du 1er ordre $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$. Supposons que l'intersection de $f = 0$ et de $\varphi = 0$ se décompose en plusieurs complexes distincts du 2e ordre. Si l'on coupe les deux complexes $f = 0$ et $\varphi = 0$ par $n - 2$ complexes simultanés du 1er ordre et du 1er degré, on détermine comme ci-dessus, dans chacun de ces deux complexes, une courbe plane. Les intersections de ces deux courbes $F(x_1, x_2) = 0$, $\Phi(x_1, x_2) = 0$ sont les intersections du complexe ($f = 0$, $\varphi = 0$) avec les $n - 2$ complexes simultanés du 1er degré. Si le complexe $f = 0$, $\varphi = 0$ se décompose, ces intersections se décomposent en plusieurs groupes qu'on obtiendra par des équations distinctes. Soit m le nombre des points contenus dans un de ces groupes, supposé irréductible. Prenons un de ces points O. Le nombre des intersections qu'il absorbe est égal, d'après le th. II, à la somme des ordres de $F(x_1, x_2)$, quand on place successivement le point (x_1, x_2) sur les différentes branches de Φ, à distance infiniment petite du 1er ordre de O. Les m points tels que O absorberont ensemble m fois ce nombre d'intersections. Comme $F(x_1, x_2)$ n'est autre chose que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, on en conclut aisément :

Théorème III. — *Si l'intersection de deux complexes du 1er ordre, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, se décompose en plusieurs complexes distincts du 2e ordre, soit O un point pris arbitrairement sur l'un de ces derniers complexes. On place le point $(x_1, \ldots, x_n)$, à distance infiniment petite du 1er ordre du point O, successivement sur les différentes nappes de $\varphi = 0$, et l'on fait la somme des ordres des quantités $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Cette somme, multipliée par le degré du complexe du 2e ordre considéré, marque le nombre des unités pour lequel ce complexe compte dans le degré total de l'intersection complète de $f = 0$ et de $\varphi = 0$.*

Soit $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ l'équation d'un autre complexe passant par ce même complexe du 2e ordre A, et supposons que le rapport $\dfrac{f}{f_1}$ reste fini quand le point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ se place sur A, quelle que soit la nappe de φ qu'il parcoure pour y parvenir. Il en résulte que f et f_1 sont du même ordre quand ce point est à une distance infiniment petite du 1er ordre de A sur une quelconque des nappes de φ. Donc le complexe A compte pour le même nombre d'unités dans le degré de l'intersection de f_1 et de φ, que dans celui de f et de φ.

Je vais m'occuper maintenant de la représentation d'un complexe d'ordre supérieur à l'unité. Dans un complexe d'ordre i, pour les points situés à l'infini, les rapports des cordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à l'une d'elles sont liés par i relations. Si l'on considère ces rapports $\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_n}$ comme de nouvelles variables $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-1}$, ces i relations définissent un complexe d'ordre i à $n-1$ dimensions. Ce complexe peut être décomposable. Il peut aussi arriver que dans ce complexe, ou dans une de ses parties, quelques-unes des coordonnées $\xi_1, \xi_2, \ldots$ soient constamment nulles ou constamment infinies. Mais, par un simple changement des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on peut faire disparaître ce cas particulier. Pour ce changement de coordonnées, on emploiera les formules

$$\begin{aligned}
x'_1 &= a_1^1 x_1 + a_1^2 x_2 + a_1^3 x_3 + \ldots + a_1^n x_n + a_1^{n+1}, \\
x'_2 &= a_2^1 x_1 + a_2^2 x_2 + a_2^3 x_3 + \ldots + a_2^n x_n + a_2^{n+1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
x'_n &= a_n^1 x_1 + a_n^2 x_2 + a_n^3 x_3 + \ldots + a_n^n x_n + a_n^{n+1}.
\end{aligned}$$

Si l'on suppose tous les coefficients a_i^j quelconques, toutes les nouvelles coordonnées $x'_1, x'_2, \ldots$ sont infinies et du même ordre, dès qu'une des anciennes coordonnées $x_1, x_2, \ldots$ est infinie. Par suite, les i relations qui lient les rapports $\frac{x'_1}{x'_n}, \frac{x'_2}{x'_n}, \ldots, \frac{x'_{n-1}}{x'_n}$ ne sont pas telles que quelques-uns de ces rapports soient constamment nuls ou constamment infinis.

Soient $C = 0, C_1 = 0$ deux complexes du 1^{er} ordre. L'élimination de x_n entre ces deux équations conduit à $D = 0$. On peut aussi, d'une infinité de manières, tirer des deux équations données une équation de la forme $vx_n - u = 0$, où v et x ne contiennent pas x_n. Le complexe du 2^e ordre $(C = 0, C_1 = 0)$ se décompose ou ne se décompose pas, suivant que D est ou n'est pas décomposable en facteurs. Soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ un facteur irréductible de D ; les équations

$$(1) \qquad \varphi = 0, \quad vx_n - u = 0$$

définissent un complexe du 2^e ordre irréductible, attendu que la seconde de ces équations donne une seule valeur de x_n pour chaque système de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ satisfaisant à $\varphi = 0$. Ce n'est pas à dire pour cela que le complexe considéré soit l'intersection complète des deux complexes (1). On va voir, en effet, que cette intersection se compose, en outre, du complexe $(\varphi = 0, v = 0)$.

Supposons que, pour les valeurs infinies des coordonnées des points du complexe, aucun des rapports $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots$ ne soit constamment nul ni infini, ce qui ne restreint pas la généralité du raisonnement, ainsi qu'on vient de le montrer. Supposons, en outre, que le complexe des points dont les coordonnées sont ces rapports mêmes, soit indécomposable. (Dans le cas où il n'y a que 3 coordonnées x_1, x_2, x_3, ces rapports sont au nombre de

2, et le complexe du 2^e ordre formé par les points dont les coordonnées sont $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}$ se compose d'un nombre fini de points. L'hypothèse dont il s'agit ici revient à supposer irréductible l'équation à une inconnue qui les détermine.) Dans cette hypothèse, on obtient, en égalant à zéro la somme des termes de degré le plus élevé dans φ, une relation entre les rapports $\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_{n-1}}{x_1}$, qui est indécomposable. Soit Φ la somme de ces termes, en sorte qu'on ait $\varphi = \Phi + \varphi_1$, φ_1 étant de degré inférieur à φ. Si les termes du degré le plus élevé dans v contiennent le facteur Φ, en sorte qu'on ait $v = V\Phi + v_1$, v_1 étant de degré inférieur à v, on pourra remplacer, pour la représentation du complexe considéré, v par $v - V\varphi = v_1 - V\varphi_1$. Si $v_1 - V\varphi_1$ contient encore, dans ses termes de degré le plus élevé, le facteur Φ, on pourra faire la même transformation sur cette nouvelle expression. Comme cette transformation en abaisse le degré, on est assuré de parvenir, en la répétant un nombre fini de fois, à une expression pouvant remplacer v, et dans laquelle les termes de degré le plus élevé ne contiennent pas le facteur Φ. Le même raisonnement est appliquable à u. On peut donc supposer que ni u, ni v ne renferment le facteur Φ dans leurs termes de degré le plus élevé. Donc, quand les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ acquièrent les valeurs infinies qui annullent Φ, u et v sont infinis d'un ordre marqué par leurs degrés respectifs. D'ailleurs x_n doit être du même ordre que les autres coordonnées. Donc, le degré de u étant p, celui de v est $p - 1$. Ainsi l'équation $vx_n - u = 0$ représente un monoïde de degré p.

En second lieu, x_n ne peut devenir infini, d'après l'hypothèse, pour l'ensemble des valeurs des autres coordonnées qui annulent à la fois v et φ, puisque le complexe des points à l'infini est irréductible. Donc, pour ces valeurs, le rapport $\frac{u}{v}$ est fini, c'est-à-dire que le complexe $u = 0$ passe par l'intersection de $v = 0$ et $\varphi = 0$, et que u est infiniment petit du même ordre que v quand le point $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ est infiniment voisin de cette intersection sur une nappe quelconque de φ. Donc, d'après la remarque faite à la suite du théorème III, l'intersection de v et de φ, qui appartient tout entière à u, compte pour autant d'unités dans le degré de l'intersection de u et de φ, que dans celle de v et de φ. C'est-à dire que, si m est le degré de φ, elle compte pour $(p-1)m$ unités. Le restant de l'intersection de u et de φ est de degré $pm - (p-1)m = m$. On a supposé que le complexe du 3^e ordre des points à l'infini du complexe considéré était irréductible. Il est facile de montrer qu'on parvient aux mêmes conséquences quand cette hypothèse n'est pas réalisée. Le complexe étant indécomposable, on peut, sans nuire à la généralité, supposer que son intersection avec $x_1 = 0$ est indécomposable. Il suffit, pour réaliser cette hypothèse, de supposer que les coordonnées ne sont point particularisées. Effectuons maintenant la transformation

$$x_1' = \frac{1}{x_1}, \quad x_2' = \frac{x_2}{x_1}, \ \ldots, \ x_n' = \frac{x_n}{x_1}.$$

Dans le nouveau complexe, l'intersection avec l'infini est indécomposable. Ce complexe est donc représenté par des équations $v'x'_n - u' = 0$, $\varphi' = 0$, où, u' étant de degré de p, v' est de degré $p-1$. Revenons aux anciennes coordonnées, et nous aurons, ainsi qu'on le voit aisément, pour l'ancien complexe, une représentation : $\varphi = 0$, $vx_n - u = 0$, où les degrés de u et de v sont ceux de u' et de v'. Donc, dans ce cas comme dans le précédent, l'intersection de u et de φ se compose de celle de v et de φ, dont le degré compte pour $(p-1)m$ unités et d'un complexe de degré m. Ces conclusions s'appliquent même à un complexe décomposable ; car soient $\varphi = 0$, $vx_n - u = 0$ et $\varphi' = 0$, $v'x_n - u' = 0$ deux complexes irréductibles : on pourra représenter leur ensemble par $\varphi\varphi' = 0$, $(\varphi' v + \varphi v')x_n - (\varphi' u + \varphi u') = 0$, et l'on voit que cette représentation satisfait aux mêmes conditions que ci-dessus.

Puisque u passe par toute l'intersection de v et de φ, et que cette intersection compte pour autant d'unités dans le degré de $(u = 0, \varphi = 0)$ que dans celui de $(v = 0, \varphi = 0)$, il en résulte que, si aucune portion de cette intersection n'est multiple dans φ, u est de la forme $Av + B\varphi$, où A est du 1er degré. Le monoïde $vx_n - u = 0$ se réduit alors à $x_n = A$. Le complexe du 2e ordre considéré est alors tracé sur un complexe du 1er ordre et du 1er degré.

Par des raisonnements analogues, on voit facilement que tout complexe du $i^{\text{ème}}$ ordre est représenté par une équation $\varphi = 0$, entre $n - i + 1$ coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_{n-i+1}$, et $i - 1$ monoïdes $x_{n-i+1} = \frac{u}{v}$, $x_{n-i+3} = \frac{u'}{v'}, \ldots,$ satisfaisant aux mêmes conditions que ci-dessus. On peut réduire ces monoïdes au même dénominateur V, et on aura alors

$$x_{n-i+2} = \frac{u_{n-i+2}}{V}, \quad x_{n-i+3} = \frac{u_{n-i+3}}{V}, \ \ldots, \ x_n = \frac{u_n}{V}.$$

De même que ci-dessus, chaque complexe $u_{n-i+2}, \ldots, u_n$ est d'un degré supérieur d'une unité à celui de V, et passe par l'intersection de V et de φ. Je vais montrer que le degré d'un tel complexe est précisément celui de φ.

Coupons ce complexe C par le complexe du 1er ordre et du 1er degré

$$P = A_n x_n + A_{n-1} x_{n-1} + \ldots + A_2 x_2 + A_1 x_1 + B = 0.$$

La substitution, dans P, des valeurs de $x_n, \ldots, x_{n-i+2}$, donne lieu à

$$\psi = A_n u_n + A_{n-1} u_{n-1} + \ldots + A_{n-i+2} u_{n-i+2} \\ + V(A_{n-i+1} x_{n-i+1} + \ldots + A_1 x_1 + B) = 0.$$

Les deux complexes du 1^{er} ordre, à $n-i+1$ dimensions, φ et ψ, ont en commun le complexe ($V=0$, $\varphi=0$), et l'on voit immédiatement, par l'application du théorème III, que, si m est le degré de φ, et $p-1$ celui de V, ce complexe compte pour $(p-1)m$ unités dans le degré de l'intersection de φ et de ψ. Le reste de cette intersection est donc de degré m, puisque ψ est de degré p. Or le degré de cette portion de l'intersection de φ et de ψ n'est autre que le degré de C. Donc *le degré du complexe* C *est égal à celui de* φ.

Par la même méthode, on démontrera bien facilement que le degré de l'intersection de C et d'un complexe du 1er ordre est égal au produit des degrés de ces complexes. Pour y parvenir, on substituera, dans l'équation du dernier complexe, à $x_{n-i+2}, \ldots, x_n$ leurs valeurs. On formera ainsi un nouveau complexe du 1er ordre χ, analogue à ψ. Si le degré du complexe donné est n, le degré de χ sera np, et l'on verra aisément que le complexe ($V=0$, $\varphi=0$) compte pour $(p-1)mn$ unités dans le degré de l'intersection de χ et de φ. Le reste de cette intersection est de degré mn, et c'est précisément le degré de l'intersection des deux complexes proposés. Donc :

Théorème IV. — *Le degré de l'intersection de deux complexes, dont l'un est du 1er ordre, est égal au produit des degrés de ces complexes.*

Quand on n'a à considérer que 3 dimensions, le théorème IV exprime que *le nombre des intersections d'une courbe et d'une surface est égale au produit des degrés de cette courbe et de cette surface*, principe que l'on paraît avoir jusqu'à présent admis sans démonstration (Voy. Salmon, *Géométrie analytique à trois dimensions*, ch. II, Classification des courbes).

Plus généralement, je vais démontrer que :

Théorème V. — *Le degré de l'intersection de deux complexes, dont la somme des ordres n'excède pas le nombre des dimensions, est égal au produit des degrés de ces complexes.*

La démonstration que je vais donner de ce théorème s'applique aussi au théorème IV.

Soit un complexe C_i^n du $i^{\text{ème}}$ ordre à n dimensions, et de degré m, représenté par les équations

$$(1) \qquad \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{n-i+1}) = 0, \quad x_{n-i+2} = \frac{u_{n-i+2}}{V}, \ldots, x_n = \frac{u_n}{V}.$$

Introduisons $i-1$ nouvelles dimensions $y_1, y_2, \ldots, y_{i-1}$, en remplaçant

$$x_1 \text{ par } x_1 + a_1^{(1)} y_1 + a_1^{(2)} y_2 + \ldots + a_1^{(i-1)} y_{i-1},$$
$$x_2 \text{ par } x_2 + a_2^{(1)} y_1 + a_2^{2} y_2 + \ldots + a_2^{(i-1)} y_{i-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_{n-i+1} \text{ par } x_{n-i+1} + a_{n-i+1}^{(1)} y_1 + a_{n-i+1}^{(2)} y_2 + \ldots + a_{n-i+1}^{(i-1)} y_{i-1}.$$

En faisant ces substitutions dans les équations (1), on obtient évidemment les équations d'un complexe C_i^{n+i-1} du $i^{\text{ème}}$ ordre à $n+i-1$ dimensions, du même degré m. Par des éliminations, on peut représenter le même complexe au moyen d'équations telles que

$$\psi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad y_1 = \frac{U_1}{W}, \quad y_2 = \frac{U_2}{W}, \ldots, y_{i-1} = \frac{U_{i-1}}{W},$$

où ψ, qui ne contient que les anciennes dimensions $x_1, \ldots, x_n$, est de degré m, et ou $U_1, \ldots, U_{i-1}$ et W ne contiennent que ces mêmes dimensions. Le complexe C_i^{n+i-1} est coupé suivant un complexe d'ordre $2i-1$ à $n+i-1$ dimensions, et de degré m, par un complexe du 1er degré et d'ordre $i-1$. C'est le cas de son intersection avec le complexe $y_1 = 0$, $y_2 = 0, \ldots, y_{i-1} = 0$.

Soit maintenant un second complexe $C_{i'}^n$ d'ordre i', à n dimensions $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On le transformera de la même manière en un complexe d'ordre i' à $n+i'-1$ dimensions en remplaçant

$$x_1 \text{ par } x_1 = b_1^{(1)} z_1 + b_1^{(2)} z_2 + \ldots + b_1^{(i'-1)} z_{i'-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$x_{n-i'+2} \text{ par } x_{n-i'+2} + b_{n-i'+2}^{(1)} z_1 + b_{n-i'+2}^{(2)} z_2 + \ldots + b_{n-i+2}^{(i'-1)} z_{i'-1}.$$

Ce nouveau complexe $C_{i'}^{n+i'-1}$ est du même degré m' que $C_{i'}^n$, et sera représenté par des équations telles que

$$\psi'(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad z_1 = \frac{U'_1}{W'}, \quad \ldots, \quad z_{i'-1} = \frac{U'_{i'-1}}{W'}.$$

Les deux complexes C_i^{n+i-1} et $C_{i'}^{n+i'-1}$ peuvent être tous deux considérés comme des complexes d'ordres i et i' à $n+i+i'-2$ dimensions $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{i-1}, z_1, \ldots, z_{i'-1})$. Pour obtenir la représentation de l'intersection de ces deux complexes, il suffira d'éliminer une des premières coordonnées, x_n, entre les équations $\psi = 0$ et $\psi' = 0$, ce qui donnera lieu à une équation $\Phi = 0$, de degré mm', entre $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$; de déduire de ces mêmes équations une relation telle que $vx_n - u = 0$, et de joindre à ces deux relations $\Phi = 0$, $vx_n - u = 0$ les expressions de $y_1, \ldots, y_{i-1}$, et de $z_1, \ldots, z_{i-1}$ fournies par la représentation des deux complexes C_i^{n+i-1} et

$C_{i'}^{n+i'-1}$, et où l'on remplace x_n par sa valeur en $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. On voit donc que l'on obtient ainsi la représentation d'un complexe d'ordre $i+i'$ à $n+i+i'-2$ dimensions, de degré mm'. L'intersection de ce dernier complexe avec

$$y_1=0,\ \ldots,\ y_{i-1}=0,\quad z_1=0,\ \ldots,\ z_{i'-1}=0$$

est un complexe du même degré mm'. Or cette intersection n'est autre chose que celle des deux complexes proposés $C_i, C^{i'}$. Le théorème V est donc entièrement démontré.

II. L'application la plus simple de la représentation d'un complexe d'ordre supérieur à l'unité est la représentation d'une courbe dans l'espace. D'après les principes qui viennent d'être exposés, toute courbe C est représentée par les équations à 3 dimensions

$$\varphi(x, y)=0,\quad vz-u=0,$$

où $\varphi=0$ est une courbe plane, d'un degré égal à celui de la courbe représentée, et où u et v ne contiennent que x et y. Le degré de u étant p, celui de v est $p-1$, la courbe $u=0$ passe en tous les points communs à $v=0$ et à $\varphi=0$, et ces points comptent pour $(p-1)m$ intersection de $u=0$ et de $\varphi=0$, m étant le degré de φ. Les m autres intersections de u et de φ sont les points où la courbe C rencontre le plan $z=0$. Si, parmi les points $(v=0,\ \varphi=0)$, il n'y en a pas qui soient multiples sur φ, la courbe est plane. Les points multiples de φ, qui sont communs à u et à v sont des *points multiples apparents* de la courbe C. Comme le lieu des points de l'espace, d'où l'on peut mener des droites s'appuyant plus de deux fois sur une courbe, est une surface, on peut toujours supposer que le point à l'infini sur l'axe des z n'est pas sur cette surface. Par suite, les points multiples apparents dont il s'agit sont simplement des points doubles. Si la courbe $\varphi=0$ a d'autres points multiples où ne passent pas les courbes $u=0$ et $v=0$, ce sont les projections des points multiples de la courbe C. Nous n'aurons pas lieu de nous en occuper ici, et nous ne parlerons que des points doubles de φ, où passent les lignes $u=0$ et $v=0$. Soit s le nombre de ces points; à cause des degrés m et $p-1$ de φ et de v, on doit avoir $s \leqslant \frac{(p-1)m}{2}$. En dehors de ces points doubles, φ et v se coupent en $(p-1)m-2s$ autres points. Donc u et v ont $(p-1)m-s$ points communs sur φ. On doit donc avoir $(p-1)s \leqslant p\,(p-1)$. Ces deux inégalités donnent $\frac{(p-1)m}{2} \geqslant s \geqslant (p-1)(m-p)$. D'où l'on conclut $p \geqslant \frac{m}{2}$.

Parmi tous les monoïdes $vz - u = 0$ équivalents pour la représentation de la courbe C, il en est dont le degré p est minimum. Toute courbe $v' = 0$ qui passe aux s points doubles de φ peut servir à former un monoïde équivalent. Car il est facile de voir que le produit $v'u$ est de la forme $u'v + a\varphi$, u' étant un polynome dont le degré surpasse celui de v' d'une unité. Par suite, quand le point (x,y) parcourt la ligne $\varphi = 0$, on a $\frac{u'}{v'} = \frac{u}{v}$. Donc le monoïde $z = \frac{u'}{v'}$ est équivalent à $z = \frac{u}{v}$ pour la représentation de la courbe C. Le nombre des points doubles de φ étant inférieur à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, si φ est une courbe propre de degré m, et à $\frac{m(m-1)}{2}$, si φ est une courbe décomposable, on pourra, dans tous les cas, faire passer par les points doubles une courbe de degré $m - 1$. Donc, tout d'abord, on peut supposer que p ne dépasse pas m. Cela étant, pour que p soit le degré minimum du monoïde, il faut que, par les s points doubles de φ, on ne puisse mener une courbe de degré inférieur à $p - 1$, ce qui exige qu'on ait $s > \frac{(p-1)p}{2}$. Cette inégalité donne pour chaque valeur de s une limite du minimum de p. On peut facilement trouver une autre limite plus rapprochée. Les éléments $(u,v),(u',v')$ de deux monoïdes équivalents sont liés par la relation $uv' - vu' = a\varphi$. u et v étant connus, et u',v' indéterminés, a est assujetti simplement à cette condition que la courbe $a = 0$ passe aux points d'intersection de u et de v extérieurs à φ. Ces points sont au nombre de $s - (p-1)(m-p)$. Pour qu'on ne puisse déterminer u' et v' de telle sorte que le degré de v' soit inférieur à $p - 1$, il faut que le degré de a ne puisse descendre au-dessous de $2p - m - 1$; ce qui exige que l'on ait

$$s - (p-1)(m-p) > \frac{(2p-m-1)(2p-m)}{2},$$

ou

$$s > \frac{m(m-1)}{2} - p(m-p).$$

Cette limite de s est constamment supérieure à $\frac{(p-1)p}{2}$, dès que p est inférieur à $m - 1$. Elle décroît constamment avec p jusqu'à la valeur de p qui la rend minima, et qui est précisément la limite absolue de p trouvée plus haut, c'est-à-dire le plus grand entier contenu dans $\frac{m+1}{2}$. Donc s ne peut, en aucun cas, descendre au-dessous du minimum obtenu en faisant dans l'expression ci-dessus $p = \left[\frac{m+1}{2}\right]$ ($[x]$ = le plus grand entier contenu dans x). Ce minimum est $\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right]$. Il existe toujours, quel que soit m, des courbes de degré m ayant $\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right]$ points doubles apparents, et il n'en existe qu'une espèce. Ces courbes résultent de l'intersection d'une surface du 2^{me} ordre et d'une surface de degré $\left[\frac{m+1}{2}\right]$ qui ont, en outre, une droite commune lorsque m est impair. On peut donc dire, ainsi que je l'ai déjà énoncé ailleurs (*Comptes rendus*, t. LXX) :

Les courbes gauches de degré m, qui ont le moindre nombre de points doubles apparents possible, en ont $\left[\left(\frac{m-1}{2}\right)^2\right]$.

Occupons-nous maintenant des complexes du $(n-1)^e$ ordre à n dimensions. Un tel complexe C est représenté par les équations

$$\varphi(x_1, x_2) = 0, \quad x_3 = \frac{u_3}{V}, \quad x_4 = \frac{u_4}{V}, \ldots, \frac{u_n}{V},$$

où chaque groupe $\left(\varphi = 0, x_i = \frac{u_i}{V}\right)$ représente une courbe dans l'espace. On peut donc dire que le complexe est représenté par $n-2$ courbes tracées sur un même cylindre. Chaque point multiple de φ, où passe v, est un point multiple apparent pour toutes ces courbes. Elles ont donc les mêmes points multiples apparents. En général, par un complexe C_3 du 3^{me} ordre et du 1er degré, on peut mener un nombre fini de complexes C_2 du 2^{me} ordre et du 1er degré rencontrant deux fois le complexe C du $(n-1)^e$ ordre. Supposons que le complexe C_3 soit celui des points à l'infini du complexe du 2^{me} ordre $(x_1=0, x_2=0)$. Alors ξ_1, ξ_2 étant les coordonnées d'un point multiple de φ, qui ne soit qu'apparent sur les courbes $\left(\varphi = 0, x_i = \frac{u_i}{V}\right)$, le complexe $(x_1 = \xi_1\ x_2 = \xi_2)$ est un des complexes C_2 passant par C_3 et rencontrant plusieurs fois le complexe C. On voit donc que, si les coordonnées ne sont pas particularisées, les points multiples apparents des courbes $\left(\varphi = 0, x_i = \frac{x_i}{V}\right)$ seront des points doubles. Leur nombre ne change pas si l'on change les coordonnées.

Si l'on considère trois coordonnées x_i, x_j, x_k d'un point du complexe C comme les coordonnées rectilignes d'un point de l'espace à 3 dimensions, ces coordonnées définissent une courbe de l'espace, que je désigne par (i,j,k). Le complexe C est représenté par le groupe des courbes $(i,j,1)$, $(i,j,2), \ldots, (i,j,n)$, que j'appelle le groupe (i,j). Le passage de la représentation du complexe C par un groupe (i,j) à la représentation par un groupe (i',j') revient à un changement de coordonnées. Par suite, toutes les courbes (i,j,k) ont le même nombre de points doubles apparents.

Voici maintenant une application géométrique importante de ces complexes. Considérons une courbe plane définie par l'équation

$$S = a_1 x^q + a_2 x^{q-1} y + \dots + a_{Q-1} x + a_Q y - 1 = 0,$$

où $(a_1, a_2, \dots, a_Q)$ sont des coefficients dont le nombre Q marque le nombre des conditions nécessaires pour déterminer la courbe. Supposons que l'on donne simplement $Q - 1$ conditions. La courbe S engendre alors un système (S), qui est défini par un complexe du $(Q-1)^{\text{ème}}$ ordre à Q dimensions $(a_1, a_2, \dots, a_Q)$. Les valeurs infinies des variables a correspondent aux courbes S qui passent à l'origine des coordonnées (x,y). Si toutes ces variables ne deviennent pas infinies ensemble, l'équation de quelques-unes des courbes S, passant à l'origine, manque de quelques termes. Or on peut choisir les axes de coordonnées de manière que ce fait ne se produise pas. Supposons, en effet, que, dans l'équation d'une de ces courbes S passant à l'origine, le coefficient d'un terme tel que $x^r y^{r'}$ soit nul : en changeant arbitrairement les directions des axes sans changer l'origine, on fera apparaître ce terme dans l'équation de la courbe, à moins que tous les termes de degré $r + r'$ n'aient des coefficients nuls. Mais cette dernière hypothèse est impossible si l'origine des coordonnées n'est pas particularisée. Car, si l'on suppose qu'en plaçant l'origine en un point arbitraire, il y ait toujours une courbe du système passant en ce point dont l'équation manque des termes de degré $r + r'$, il en résulte que chaque courbe du système jouit de cette propriété relativement à chaque point situé sur elle. Il y a donc lieu de se demander quelles sont les courbes telles qu'en plaçant l'origine des coordonnées sur la courbe, l'équation qui les représente manque des termes d'un degré donné. Or il est bien facile de voir que ces courbes ne sauraient être des courbes propres, et qu'il faut et il suffit que leur équation contienne un facteur élevé à une puissance égale au degré des termes qui doivent disparaître. Cette hypothèse est donc impossible dans le cas d'un système de courbes propres.

Il résulte de cette discussion que, dans le complexe du $(Q-1)^{e}$ ordre, à Q dimensions, qui représente le système (S), les Q coordonnées deviennent infinies toutes ensembles. Par suite, ce complexe C est représenté par $Q - 2$ courbes $(i,j,1), (i,j,2), \dots, (i,j,Q)$ tracées sur le même cylindre, rapportées à des axes quelconques. Le degré de ces courbes marque le nombre des courbes du système qui passent en un point, ou *la première caractéristique* μ du système, attendu que la condition pour la courbe S de passer en un point est linéaire en $(a_1, a_2, \dots, a_Q)$.

Si l'on change les axes des coordonnées (x,y), ou si l'on applique à ces coordonnées une transformation homographique, ces transformations ont pour effet de remplacer les coefficients a par des expressions linéaires en fonction de ces coefficients. Elles reviennent donc à de simples changements de coordonnées pour le complexe C. Par suite, toutes les propriétés de C indépendantes des coordonnées donnent dans le système (S) des propriétés subsistant lorsqu'on lui applique une transformation homographique. Considérons, par exemple, les points doubles apparents des courbes représentatives de C. Soit a_{q+1} le coefficient de y^q dans S. Quelle est la signification des points doubles apparents des courbes du groupe $(1,q+1)$? Pour un tel point, on aura deux valeurs de chacun des coefficients a, autres que a_1 et a_{q+1}, répondant à une seule valeur de chacun de ces derniers. On aura donc deux courbes S et S', telles que la courbe $S - S' = 0$, qui passe à l'origine des coordonnées, aura dans ces termes de degré le plus élevé, le facteur xy. Cette courbe passe donc par les deux points à l'infini des deux axes de coordonnées. Le nombre des points doubles apparents des courbes du groupe $(1,q+1)$ marque donc le nombre des couples de courbes du système, telles que par leurs intersections et par trois points donnés, dont deux à l'infini sur les axes et un à l'origine, on peut mener une courbe du même degré. Le nombre des points doubles apparents des courbes du groupe $(1,q+1)$ ne changeant pas, si l'on transforme homographiquement le système (S), on peut dire que *ce nombre marque le nombre des couples de courbes du système, telles que, par leur intersection et* 3 *points arbitraires, on peut mener une courbe du même degré.* D'après cette interprétation, on voit que les points multiples apparents des courbes du groupe $(1,q+1)$ et, par suite, des autres groupes, sont des points doubles, si les axes des coordonnées, x,y, sont quelconques.

Si, par les intersections de chaque couple de courbes du système (S), on mène les courbes du même degré, ces dernières contiennent 3 arbitraires. Elles forment un complexe de courbes, qui est d'ordre $Q-3$. Le nombre de ces courbes qu'on peut mener par 3 points s'appellera la 1^re^ *caractéristique* de ce complexe. Ce complexe sera dit *dérivé* du système (S). Si le nombre des couples de courbes S ci-dessus est moindre que $\left[\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2\right]$, toutes les courbes (i,j,k) sont planes, le nombre de leurs points doubles apparents est nul. De plus, chaque coefficient a_k s'exprimant alors linéairement en fonction de deux coefficients a_i, a_j, l'équation de la courbe S est comprise dans la forme $S' + a_i S'' + a_j S''' = 0$, qui représente un *réseau.* Donc :

THÉORÈME VI. — *Si la* 1^re^ *caractéristique du complexe dérivé d'un système est inférieur à* $\left[\left(\frac{\mu-1}{2}\right)^2\right]$, *$\mu$ étant celle du système, elle est nulle. Quand la* 1^re^ *caractéristique du complexe dérivé est nulle, le système fait partie d'un réseau.*

On pourrait donner différentes autres interprétations des points doubles apparents des courbes (i,j,k), relativement au système (S), et obtenir ainsi des théorèmes sur des couples de courbes de ce système. Je ne m'y arrête pas, attendu que ces théorèmes découlent des propriétés générales des complexes de courbes, d'ordre $Q-3$, tels que le complexe dérivé. Je ferai seulement remarquer que, dans le cas d'un système de coniques, la 1re caractéristique du complexe dérivé marque le nombre des couples de coniques du système qui ont une corde commune donnée.

Toutes les considérations précédentes s'appliquent, sans modification, aux systèmes de surfaces et aux systèmes de complexes du 1er ordre à n dimensions, et donnent lieu, pour ces cas, à des théorèmes identiques au théorème VI.

Si l'on veut astreindre les courbes d'un système (S) à une condition nouvelle, on définira cette condition par une équation entre les coefficients a. Soit m le degré de cette équation. D'après le théorème IV, le nombre des systèmes de valeurs des coefficients a qui satisfont à cette condition et à celles du système (S), est $m\mu$, puisque ces dernières sont exprimées par un complexe de degré μ. Ce qui distingue tout particulièrement les beaux théorèmes découverts par M. Chasles à l'occasion de cette recherche, c'est qu'il donnent le nombre des *courbes propres* d'un système qui satisfont à une condition. Pour parvenir à ces théorèmes, il faut donc retrancher du nombre $m\mu$ le nombre afférent aux courbes non propres. C'est ce que nous allons faire pour le cas d'un système de coniques sur le plan. Il est facile de voir que, dans ce cas, il n'y a lieu de considérer, parmi les courbes non propres du système, que les coniques réduites à une droite (*).

Soit

$$S = ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2\varepsilon y + 1 = 0$$

l'équation d'une conique appartenant à un système défini par les relations

$$\varphi(d,\varepsilon) = 0, \quad b = \frac{u}{v}, \quad a = \frac{u_1}{v}, \quad c = \frac{u_2}{v}.$$

Les conditions, pour les coniques S, de se réduire à une droite, sont

$$\alpha = bd - a\varepsilon = 0, \quad \alpha_1 = a - d^2 = 0, \quad \alpha_2 = c - \varepsilon^2 = 0.$$

On peut remplacer les cinq coefficients a,b,c,d,ε par $\alpha,\alpha_1,\alpha_2,d,\varepsilon$, de la manière suivante : on a

$$a = d^2 + \alpha_1, \quad c = \varepsilon^2 + \alpha_2, \quad b = \frac{\alpha}{d} + \frac{a\varepsilon}{d} = \frac{\alpha}{d} + \frac{\varepsilon}{d}(d^2 + \alpha_1).$$

(*) Voir *Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du 2e ordre*, 3e partie. détermination des surfaces du 2e ordre.

Étant donnée une condition, représentée par une équation entre les coefficients a,b,c,d,ε, on y substituera ces valeurs de a,c,b. Si l'équation ainsi transformée ne contient pas de terme indépendant de α,α_1,α_2, la condition est telle qu'elle est satisfaite par toute droite considérée comme une conique. Prenons, par exemple, la condition $\alpha_1=0$, sur laquelle la transformation est toute faite. Cherchons maintenant le nombre des coniques S qui satisfont à cette condition. Pour cela, mettons dans l'équation $\alpha_1=a-d^2=0$, à la place de a, sa valeur $\frac{u_1}{v}$; nous obtenons l'équation $u_1-d^2v=0$. d et ε étant censées des coordonnées rectilignes, cette équation représente une courbe ψ, qui coupe $\varphi=0$ de degré μ en des points dont, si p est le degré de u, $2(p-1)\mu$ sont sur u et sur v. Les 2μ autres conviennent à la question.

Supposons maintenant que le système (S) contienne des coniques réduites à une droite. Soit O le point de φ répondant à l'une d'elles, ce point pouvant être multiple sur φ. En ce point, c'est-à-dire lorsque d et ε sont égaux aux coordonnées de ce point, α,α_1,α_2 sont nuls. Donc la courbe ψ passe au point O. D'après le théorème II, le nombre des intersections des deux courbes φ et ψ, confondues en O, est marqué par la somme des ordres des quantités ψ ou α_1, quand le point (d,ε) est placé successivement à distance infiniment petite du 1[er] ordre de O, sur les différentes branches de φ. Soit ω cette somme; nous voyons que la conique réduite à une droite, ou *droite conique*, considérée réduit de ω unités le nombre des coniques du système satifaisant à la condition $\alpha_1=0$. Mais cette condition est celle de toucher l'axe des x. Si les axes sont quelconques, le nombre ω devra être le même si l'on prend pour axe des x une droite quelconque du plan. On en conclut tout d'abord qu'il est le même, si, à la condition $\alpha_1=0$, on substitue la condition $\alpha_2=0$. La condition de toucher la droite de l'infini est $b^2-ac=0$. On en conclut donc encore que la somme des ordres de b^2-ac est ω, quand le point (d,ε) se place successivement sur les différentes branches de φ, à distance infiniment petite du 1[er] ordre de O. Or on a

$$\alpha(bd+a\varepsilon)=b^2d^2-a^2\varepsilon^2=d^2(b^2-ac)+a^2\alpha_2-ac\alpha_1.$$

Par suite, la somme des ordres de α est également ω.

Prenons maintenant, au lieu des précédentes, une condition qui soit telle que l'équation en d, ε, α, α_1, α_2 qui la représente soit satisfaite pour $\alpha=\alpha_1=\alpha_2=0$. Soit n le moindre degré de cette équation en α,α_1,α_2. Si, dans cette équation, on exprime α,α_1,α_2 en d,ε, par les conditions du système (S), on obtient une équation qui représente une courbe χ, de degré mp,m étant le degré de la condition. Cette courbe rencontre φ en $mp\mu$ points dont $m(p-1)\mu$ appartiennent à l'intersection de v et de φ. Il reste donc $m\mu$

points. La courbe χ passe, en outre, au point O, et la somme des ordres de χ, quand le point (d, ε) est placé successivement sur les différentes branches de φ, à distance du 1er ordre de O, est $n\omega$. Donc le point O compte pour $n\omega$ intersections de φ et de χ. Donc la droite conique considérée réduit de $n\omega$ le nombre des coniques du système satisfaisant à la condition donnée. Donc si Ω est la somme des nombres ω analogues pour toutes les droites coniques du système (S), le nombre des coniques propres satisfaisant à la condition donnée est $N = m\mu - n\Omega$. En appelant ν le nombre des coniques qui touchent une droite, on a $\nu = 2\mu - \Omega$. Donc, en général, on a $N = (m - 2n)\mu + n\nu$, équation qui exprime un théorème célèbre, dû à M. Chasles.

Pour le cas d'un système de surfaces du 2me ordre, on parviendra au résultat connu en suivant une marche analogue. Les surfaces non propres à éliminer sont les surfaces réduites à un plan, et les surfaces réduites à deux plans. On considérera d'abord les premières relativement à la condition de contact avec une droite, et on obtiendra la relation $\nu = 2\mu - \Omega$, ν étant la 2me caractéristique du système. En désignant par ρ le nombre des surfaces du système qui touchent un plan, on reconnaîtra que ce nombre est égal à $3\mu - 2\Omega$, moins le nombre afférent aux surfaces réduites à deux plans, ou $\rho = 3\mu - 2\Omega - \Omega'$. Enfin, pour une autre condition, on obtiendra

$$N = m\mu - n\Omega - r\Omega' = (m - 2n + r)\mu + (n - 2r)\nu + r\rho,$$

équation qui exprime un autre théorème de M. Chasles.

Enfin, de la même manière, on démontrera aisément que le nombre des complexes indécomposables du 1er ordre, à n dimensions du 2me degré, d'un système, qui satisfont à une condition, s'exprime par la même formule à 3 termes, attendu qu'il n'y a encore que deux espèces de complexes non propres à éliminer.

Il n'est pas sans utilité de remarquer que les mêmes raisonnements permettent de prévoir les résultats qu'on obtiendrait si l'on voulait éliminer certaines familles de courbes propres, d'un système (S), du nombre des solutions du problème proposé. Admettons, par exemple, qu'un système (S) de coniques dans le plan contienne des cercles. Cherchons maintenant les coniques du système qui coupent une droite donnée sous des angles supplémentaires. Tous les cercles du système satisfont à cette condition. Le nombre des coniques, différentes des cercles, qui y satisfont, est donc moindre que dans le cas général. On reconnaîtra aisément qu'il est généralement égal à μ. Dans le cas actuel, il sera $\lambda = \mu - \Omega''$. Ici le nombre Ω'' désigne non pas le nombre des cercles du système, mais un nombre qui dépend de la manière dont les cercles existent dans le système, et qui est, de tout point, analogue aux nombre Ω et Ω' ci-dessus.

Si, maintenant, on considère une autre condition qui soit satisfaite par tous les cercles, on trouvera que le nombre des coniques, autres que les cercles appartenant au système (S), et qui y satisfont, est

$$N = \alpha\mu + \beta\nu - q\Omega'' = (\alpha - q)\mu + \beta\nu + q\lambda.$$

On aura donc à considérer une caractéristique λ de plus. Et, en général, chaque famille que l'on voudra éliminer donnera lieu à une caractéristique de plus.

Les mêmes problèmes relatifs à des systèmes de degré plus élevé peuvent être traités par la même méthode. Mais ce sujet exige des développements que j'espère pouvoir présenter en une autre occasion.

Les complexes à Q dimensions d'ordre inférieur à $Q - 1$ s'appliquent, comme ceux d'ordre $Q - 1$, à la représentation des conditions qui existent entre les coefficients d'une courbe plane variable. Si, entre les Q coefficients de la courbe

$$S = a_1 x_q + a_2 x^{q-1} y + \ldots + a_{Q-1} x + a_Q y - 1 = 0,$$

il y a seulement $Q - i$ relations, la courbe S engendre un complexe de courbes, $(S)_{Q-i}$. Ce complexe de courbes sera représenté par un complexe d'ordre $Q - i$, C_{Q-i}, à Q dimensions, $a_1, a_2, \ldots, a_Q$, dans lequel les points à l'infini forment un complexe irréductible d'ordre $Q - i + 1$. Car l'origine des coordonnées (x, y) étant quelconque, et le complexe $(S)_{Q-i}$ étant censé indécomposable, il en est de même du complexe, d'ordre supérieur d'une unité, formé par les courbes S qui passent à l'origine des coordonnées. Le degré du complexe C_{Q-i} marque le nombre des courbes S qu'on peut mener par i points. C'est la 1re caractéristique de $(S)_{Q-i}$. On voit que si l'on astreint les courbes S à faire partie de deux complexes $(S)_{Q-i}$ et $(S)_{Q-i'}$ donnés, leur ensemble constituera un complexe d'ordre $2Q - i - i'$, représenté par l'intersection de C_{Q-i} et $C_{Q-i'}$. La 1re caractéristique de ce complexe est donc le produit de celles des complexes considérés. Dans le cas où la somme des ordres des deux complexes est égale à Q, le produit est le nombre des courbes communes aux deux complexes. Ces résultats doivent être modifiés si les complexes contiennent des courbes non propres. Mais on peut, dès à présent, énoncer ce théorème :

THÉORÈME VII. — *Q étant le nombre des conditions nécessaires pour déterminer des courbes S sur le plan, si l'on considère deux complexes de ces courbes assujetties respectivement à i et à i' conditions, et dont l'un ne contienne aucune courbe non propre, le produit des 1res caractéristiques de ces deux complexes marque : 1° si $i + i'$ est égal à Q, le nombre des courbes qui leur sont communes ; 2° si $i + i'$ est inférieur à Q, la 1re caractéristique du système ou du complexe fourni par ces courbes.*

Tout complexe de courbes, de 1re caractéristique égale à l'unité, est représenté par un complexe du 1er degré, dans lequel, son ordre étant j, j coordonnées s'expriment linéairement en fonction des $Q-j$ autres. Par suite, ce complexe de courbes, qu'on peut appeler *complexe linéaire*, est représenté par une équation de la forme

$$S = S' + a_1 S'' + \ldots + a_{Q-j+1} S^{Q-j+1} = 0,$$

dans laquelle $a_1, a_2, \ldots, a_{Q-j+1}$ sont des arbitraires. La courbe $S=0$ est une courbe quelconque du complexe.

Soit maintenant un complexe de 1re caractéristique égale à 2, il est représenté par un complexe

$$\varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{Q-j+1}) = 0, \quad a_{Q-j+2} = \frac{u_{Q-j+2}}{V}, \ldots,$$

dont le degré est 2. Par suite, le degré φ est 2. Or il est aisé de voir que le complexe du 1er ordre et du 2me degré à $Q-j+1$ dimensions, $\varphi=0$ ne peut contenir un complexe double d'ordre 2 sans se décomposer. Donc les coordonnées de ce complexe, autres que $a_1, a_2, \ldots, a_{Q-j+1}$, s'expriment linéairement en fonctions de ces dernières. Par suite, l'équation générale des courbes du complexe est

$$S = S' + a_1 S'' + \ldots + a_{Q-j+1} S^{Q-j+1} = 0,$$

dans laquelle les $Q-j+1$ arbitraires a sont liées par la relation $\varphi = 0$. Donc :

Théorème VIII. — *Tout complexe de courbes, dont la 1re caractéristique est 2, est contenu dans un complexe linéaire d'ordre inférieur d'une unité.*

Dans le cas d'un complexe d'ordre $Q-2$, c'est-à-dire formé par des courbes contenant 2 arbitraires, la fonction φ ne contient que 3 dimensions. Égalée à zéro, elle représente une surface. Toutes les fois que cette surface ne contient pas de ligne double, le complexe est contenu dans un complexe linéaire d'ordre $Q-3$. Si cette surface est réglée, c'est-à-dire engendrée par une série de droites, le complexe peut être engendré par une série de faisceaux $S' + aS'' = 0$. Donc, si la 1re caractéristique est 2, c'est-à-dire si la surface φ est du 2me degré, on a :

Théorème IX. — *Tout complexe de courbes d'ordre* $Q-2$ *et de 1re caractéristique 2, peut être engendré de deux manières différentes par une série de faisceaux.*

Si la 1re caractéristique du complexe d'ordre $Q-2$ est égale à 3, la surface φ est du 3me degré. Suivant qu'elle a ou qu'elle n'a pas de droite double, elle est ou n'est pas réglée. Donc :

Théorème X. — *Les complexes de courbes d'ordre* $Q-2$ *et de 1re caracté-*

ristique égale à 3 sont de deux espèces : les uns sont contenus dans un complexe linéaire d'ordre Q — 3, *et contiennent, en général*, 27 *faisceaux ; les autres sont engendrés par une suite de faisceaux.*

Je me bornerai, pour le moment, à ces quelques conséquences si faciles de la théorie ébauchée au début de ce travail. Il est entendu que ces derniers théorèmes s'appliquent aussi aux complexes de surfaces, et aux complexes de complexes du 1[er] ordre à n dimensions. On voit, par les applications ci-dessus, que la considération des complexes de courbes donne une interprétation très-nette de la géométrie à n dimensions.