Bulletin de la S. M. F.

G. Fouret

Détermination du nombre exact des solutions d'un système de *n* équations algébriques à *n* inconnues

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 127-139
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__127_1>

Détermination du nombre exact des solutions d'un système de n équations algébriques à n inconnues; par M. Fouret.

(Séance du 28 janvier 1874)

1. D'après un théorème bien connu, dû à Bezout, *le nombre des solutions d'un système de* n *équations algébriques de degrés quelconques à* n *inconnues est, en général et au plus, égal au produit des degrés de ces équations.*

Ce nombre de solutions est rigoureusement atteint, lorsque les équations sont complètes et que leurs divers coefficients sont indépendants les uns des autres; mais, en dehors de ce cas général, le nombre des solutions est fréquemment au-dessous de la limite donnée par le théorème de Bezout.

Je me propose, dans cette note, premièrement de donner une démonstration nouvelle et fort simple de ce théorème; secondement de le compléter, en faisant voir comment les particularités présentées par les équations peuvent amener, dans certains cas, une diminution dans le nombre des solutions.

Ces recherches m'ont été inspirées par deux intéressantes communications faites, il y a quelques mois, à l'Académie, par M. Chasles, touchant la détermination, par le principe de correspondance, du nombre des points d'intersection de deux courbes algébriques, situés à distance finie (*Comptes-rendus*, t. LXXV, p. 736, et t. LXXVI, p. 126). En me basant sur les mêmes considérations, j'ai traité, dans une première note présentée à la Société mathématique, le cas de trois surfaces ou autrement dit de trois équations (*Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 122) (*). Enfin, en généralisant le même mode de démonstration et lui donnant une forme analytique, je suis parvenu à l'appliquer au cas général d'un nombre quelconque d'équations. C'est ce résultat que je me propose de développer ici.

II. Soit

$$(1) \qquad \begin{cases} f_1(x,y,z,\ldots,s,t)=0, \\ f_2(x,y,z,\ldots,s,t)=0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;, \\ f_{n-1}(x,y,z,\ldots,s,t)=0, \\ f_n(x,y,z,\ldots,s,t)=0, \end{cases}$$

un système de n équations algébriques à n inconnues, et de degrés respectivement égaux à $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$.

Nous supposerons que ces équations ne manquent d'aucun terme et que leurs coefficients soient indépendants les uns des autres. Je dis que le nombre des solutions de ce système d'équations est égal à $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n$.

Pour démontrer ce théorème dans toute sa généralité, il nous suffira d'établir que, supposé vrai dans le cas de $n-1$ équations à $n-1$ inconnues, il l'est également dans le cas de n équations à n inconnues; car, de la propriété dont jouit toute équation algébrique à une inconnue d'admettre un nombre de racines égal à son degré, on pourra dès lors conclure qu'un système de deux équations à deux inconnues admet un nombre de solutions égal au produit de leurs degrés, et ainsi de suite, de proche en proche,

(*) J'ai communiqué le 9 juillet dernier, à la Société mathématique, une seconde démonstration du théorème relatif à l'intersection de trois surfaces, dont l'analogue en géométrie à deux dimensions comprend, comme cas particuliers, les diverses démonstrations données par M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LXXV, p. 736, et t. LXXVI, p. 126).

jusqu'au cas d'un système formé d'un nombre quelconque d'équations à pareil nombre d'inconnues.

III. Cela posé, considérons le système formé par les $n-1$ premières équations (1) et les suivantes :

$$(2) \qquad f_n(\xi,\eta,\zeta,\ldots,\sigma,\tau)=0,$$

qui n'est autre que la dernière des équations (1) dans laquelle $\xi,\eta,\zeta,\ldots,\sigma,\tau$ sont substitués respectivement à $x, y, z, \ldots, s, t$,

$$(3) \qquad \frac{\xi+a}{x+a}=\frac{\eta+b}{y+b}=\frac{\zeta+c}{z+c}=\ldots=\frac{\sigma+g}{s+g}=\frac{\tau+h}{t+h}=\rho.$$

$$(4) \qquad Ax+By+Cz+\ldots+Gs+Ht=l,$$

$$(5) \qquad A\xi+B\eta+C\zeta+\ldots+G\sigma+H\tau=\lambda,$$

$a, b, c, \ldots, g, h, A, B, C, \ldots, G, H$ étant des coefficients quelconques, $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau, \rho, l$ et λ étant des variables qui, jointes à $x, y, z, \ldots, s, t$, forment un nombre total de $2n+3$ variables liées entre elles par $2n+2$ équations.

En éliminant entre ces équations les $2n+1$ variables autres que l et λ, on obtiendrait une certaine équation

$$(6) \qquad \varphi(l,\lambda)=0.$$

Cherchons quel serait le degré de λ dans cette équation. Pour cela, supposons donnée à l une certaine valeur prise d'ailleurs arbitrairement. En vertu du théorème de Bezout, admis provisoirement dans le cas de $n-1$ équations, le système formé des $n-1$ premières équations (1) et de l'équation (4) déterminera $p_1 p_2 \ldots p_{n-1}$ systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$. D'un autre côté, en tirant des équations (3)

$$\xi=\rho x+a(\rho-1),\quad \eta=\rho y+b(\rho-1), \ldots, \tau=\rho t+h(\rho-1),$$

et substituant ces expressions dans (2), on formera une équation en $x, y, z, \ldots, s, t$ et ρ, de degré p_n en ρ, qui, pour chaque système de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$, fournira p_n valeurs de ρ, dont on déduira, en vertu des équations (3) et (5), p_n systèmes de valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$ et λ. D'où il résulte qu'à une valeur de l choisie arbitrairement correspondra un nombre de valeurs de λ égal à $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n$. Autrement dit, le degré de λ dans l'équation (6) sera égal à $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n$.

En donnant à λ une valeur quelconque, on tirerait du système d'équations ci-dessus défini un certain nombre π de solutions de $x, y, z, \ldots, s, t$, et, par suite, π valeurs de l. Par suite, en faisant dans (6) $l=\lambda$, on aurait une équation en l ou λ, d'un degré égal à $p_1 p_2 \ldots p_n + \pi$ (*).

(*) Nous démontrons plus loin que le terme en $\lambda^{p_1 p_2 \ldots p_n} l^{\pi}$ existe dans l'équation (6), ce qui est nécessaire pour compléter notre raisonnement.

IV. Pour $\rho=1$, le système formé des $n-1$ premières équations (1) et des équations (2), (3), (4) et (5), est satisfait par tout système de valeurs de x, y, z, ..., s, t, déterminé par le système des n équations (1). D'autre part, à chacune de ces solutions correspond une valeur de $l=\lambda$. Par suite, les solutions du système (1) sont comprises parmi les systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$, qui dérivent de la condition $l=\lambda$ introduite dans le système formé des $n-1$ premières équations (1) et des équations (2), (3), (4) et (5). Or, il est facile de trouver quels sont les divers systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$, qui dérivent de cette condition. En effet, en ayant égard aux relations (3), on peut écrire l'équation (5) sous la forme suivante :

$$\text{(7)} \qquad Ax + By + Cz + \ldots + Gs + Ht = \frac{\lambda - (\rho - 1)k}{\rho},$$

en posant

$$Aa + Bb + Cc + \ldots + Gg + Hh = k.$$

En comparant cette équation avec l'équation (4), on voit qu'elles ne sont compatibles qu'autant que l'on a, soit $\rho=1$, soit $\lambda=-k$.

Or, à la valeur $\lambda=-k$, comme à toute valeur de λ, correspondent π systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$, qui, dans le cas général où nous nous plaçons ici, ne sauraient être identiques respectivement à des systèmes correspondants de valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$. Donc, parmi les $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n + \pi$ valeurs de $l=\lambda$, il n'y en a que $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n$ qui correspondent à $\rho=1$; et les $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n$ systèmes de valeurs correspondantes de $x, y, z, \ldots, s, t$ étant, comme nous l'avons vu, les solutions du système (1), le théorème de Bezout se trouve démontré.

V. Dans la démonstration précédente, nous avons admis que l'équation (6) était de degré $p_1 p_2 \ldots p_{n-1} p_n + \pi$, c'est-à-dire qu'elle contenait un terme en $\lambda^{p_1 p_2 \ldots p_n} l^{\pi}$. Cherchons dans quels cas le degré de l'équation (6) pourra s'abaisser, et quelles conséquences il en résultera pour le nombre des solutions du système des équations (1).

Il est facile de voir que le degré de l'équation (6) s'abaissera si, à une valeur de l infiniment grande, correspond un nombre de valeurs de λ inférieur à $p_1 p_2 \ldots p_n$. Or, pour que l soit infiniment grand, il faut, d'après l'équation (4), qu'une ou plusieurs des variables $x, y, z, \ldots, s, t$ prennent des valeurs infiniment grandes. En les supposant toutes dans ce cas, les $n-1$ premières équations (1) qui déterminent ces valeurs peuvent être réduites chacune à leurs termes du degré le plus élevé, et deviennent par ce fait homogènes. Elles sont, en conséquence, satisfaites par une infinité de systèmes de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$; mais les rapports de $n-1$ de ces variables à la $n^{\text{ème}}$ sont déterminés et doivent satisfaire à un système de $n-1$ équations, dont les degrés respectifs sont $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$.

Soit $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$, ..., $s = s'$, $t = t'$ un système de valeurs des variables qui satisfasse à l'ensemble de ces équations. En désignant par r un paramètre quelconque, les valeurs

$$(8) \qquad x = \frac{x'}{r},\ y = \frac{y'}{r},\ z = \frac{z'}{r}, \ldots, s = \frac{s'}{r},\ t = \frac{t'}{r}$$

satisferont également au système des $n-1$ équations, et, en faisant r infiniment petit, on aura une solution correspondant à une valeur infiniment grande de l. Il y aura ainsi, d'après le théorème de Bezout, admis dans le cas de $n-1$ équations, $p_1, p_2 \ldots, p_{n-1}$ systèmes distincts de valeurs infiniment grandes des variables qui satisferont au système des $n-1$ premières équations (1).

En substituant dans (2) les valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$, déduites de (8), au moyen des équations (3), c'est-à-dire

$$\xi = \frac{\rho}{r} x' + a(\rho - 1),\ \eta = \frac{\rho}{r} y' + b(\rho - 1),\ \zeta = \frac{\rho}{r} z' + c(\rho - 1), \ldots,$$

$$\sigma = \frac{\rho}{r} s' + g(\rho - 1),\ \tau = \frac{\rho}{r} t' + h(\rho - 1),$$

nous formerons une équation en ρ, qui sera du degré p_n, et fournira pour $\frac{\rho}{r}$ p_n valeurs finies, lorsque l'on supposera que r et ρ deviennent ensemble infiniment petits.

Chacune de ces racines fournissant une solution en $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$, on aura au total un nombre de solutions en $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$ égal à $p_1 p_2 \ldots p_n$, donnant un pareil nombre de valeurs de λ.

Le nombre des valeurs de λ correspondant à une valeur infiniment grande est donc, en général, égal à $p_1 p_2 \ldots p_n$: ce qui complète la démonstration du théorème de Bezout, tel que nous l'avons énoncé en commençant.

VI. Il en serait autrement dans le cas où le degré de l'équation en ρ, ou en $\frac{\rho}{r}$ (ρ et r étant supposés infiniment petits), viendrait à s'abaisser. Or, il faudrait pour cela que le coefficient du terme en $\left(\frac{\rho}{r}\right)^{p_n}$ fût nul, c'est-à-dire que les valeurs

$$\xi = x',\ \eta = y',\ \zeta = z',\ \ldots,\ \sigma = s',\ \tau = t'$$

annulassent le polynôme formé par l'ensemble des termes du degré le plus élevé dans l'équation (2); ou autrement dit que le système des équations (1), réduites chacune à leurs termes du degré le plus élevé, eussent une ou plusieurs solutions communes (en dehors, bien entendu, de la solution $x = 0$, $y = 0, \ldots, s = 0, t = 0$).

Cette circonstance exige qu'un certain déterminant, qui n'est autre que le résultant des équations (1) réduites chacune à leurs termes du degré le plus élevé, soit nul.

On peut donc dire que *le nombre des solutions d'un système d'équations algébriques à pareil nombre d'inconnues est égal au produit des degrés de ces équations, toutes les fois que ces équations sont complètes et qu'il n'existe aucune relation entre les coefficients des termes du plus haut degré dans chaque équation. Le nombre des solutions est moindre, lorsque le résultant des équations, réduites chacune à leurs termes du plus haut degré, est nul.*

VII. En outre, dans ce dernier cas, si ω désigne le nombre des systèmes de valeurs de $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \cdots, \frac{s}{x}, \frac{t}{x}$, qui satisfont à l'ensemble des équations (1) réduites chacune à leurs termes du plus haut degré, chaque solution étant d'ailleurs comptée dans ω avec son degré de multiplicité, il est facile de voir que le nombre des solutions (en valeurs finies) du système des équations (1) sera égal à

$$p_1 p_2 \cdots p_{n-1} p_n - \omega.$$

Il suffit, pour cela, de considérer ω solutions du système des équations (1) supposées générales, c'est-à-dire exemptes de toute particularité, et d'imaginer que les coefficients de ces équations varient de telle sorte que les valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$, composant chacune des ω solutions, deviennent infinies.

Ces ω solutions se trouveront perdues pour le système (1), mais elles donneront lieu en même temps à ω solutions en $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots, \frac{s}{x}, \frac{t}{x}$, qui seront communes aux équations (1) réduites chacune à leurs termes du plus haut degré.

VIII. Il est un cas où, au seul aspect des équations, on reconnaît immédiatement des réductions à faire au nombre de solutions indiqué par le théorème de Bezout. C'est lorsque, dans les diverses équations, les degrés d'une des inconnues sont respectivement inférieurs aux degrés de ces équations. Dans ce cas, les équations en $\frac{y}{x}, \frac{z}{x}, \ldots, \frac{s}{x}, \frac{t}{x}$, résultant des équations (1) réduites respectivement à leurs termes du plus haut degré, admettent la solution commune $\frac{y}{x} = 0, \frac{z}{x} = 0, \ldots, \frac{s}{x} = 0, \frac{t}{x} = 0$.

Supposons par exemple que x entre aux degrés $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}, m_n$ dans les équations (1), $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_{n-1}, m_n$ étant d'ailleurs respectivement moindres que $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_{n-1}, p_n$. Il est facile de démontrer que le nombre des solutions en valeurs finies du système (1) sera au plus égal à

$$p_1 p_2 \cdots p_{n-1} p_n - (p_1 - m_1)(p_2 - m_2) \cdots (p_{n-1} - m_{n-1})(p_n - m_n)$$

Nous y parviendrons en établissant tout d'abord la proposition suivante :

IX. Supposons que les équations (1) n'aient respectivement aucun terme d'un degré inférieur à q_1 pour la première, à q_2 pour la seconde, etc., à q_n pour la $n^{\text{ème}}$, et qu'elles soient d'ailleurs exemptes de toute autre particularité. Nous allons démontrer que la solution

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ldots,s=0,\ t=0$$

qui satisfait à ces équations doit être comptée avec un degré de multiplicité égal à $q_1q_2\cdots q_{n-1}q_n$.

Pour cela, considérons le système formé par l'ensemble des $n-1$ premières équations (1) jointes à l'équation (4), et éliminons une des variables, t par exemple, entre ces n équations. Nous formerons ainsi un système de $n-1$ équations à $n-1$ inconnues, de degrés respectivement égaux à $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}$,

$$(9)\qquad \begin{cases} \Psi_1(x,y,z,\ldots,s)=0, \\ \Psi_2(x,y,z,\ldots,s)=0, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots, \\ \Psi_{n-1}(x,y,z,\ldots,s)=0. \end{cases}$$

En faisant $l=0$, les termes de degrés supérieurs à $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}$ disparaîtront respectivement de ces équations, et l'on obtiendra par suite un système remplissant les mêmes conditions que le système (1), mais contenant une équation et une inconnue de moins.

Admettons provisoirement comme vraie, pour le cas de $n-1$ équations, la proposition à établir, c'est-à-dire admettons que la solution

$$x=0,\ y=0,\ z=0,\ldots,\ s=0,\ t=0$$

doive être comptée avec un degré de multiplicité égal à $q_1q_2\cdots q_{n-1}$. Il nous suffira d'en déduire que le même fait sera encore vrai dans le cas d'un système de n équations, tel que le système (1), remplissant les mêmes conditions.

En effet, si, au lieu de supposer $l=0$ dans le système (9), nous le supposons infiniment petit, il résulte de notre hypothèse que ce système admet un nombre de solutions en valeurs infiniment petites, qui est égal à $q_1q_2\cdots q_{n-1}$. Si l'on considère l'équation en ρ résultant de la substitution, dans l'équation (2), des valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \ldots, \sigma, \tau$, tirées des équations (3), il est facile de voir que, pour tout système de valeurs infiniment petites de $x, y, z, \ldots, s, t$, cette équation en ρ admet q_n racines infiniment peu différentes de l'unité. Par suite, aux $q_1q_2\ldots q_{n-1}$ groupes de valeurs infiniment petites de $x, y, z, \ldots, s, t$, donnés par l'ensemble des équations (4) et (9), correspondent $q_1q_2\ldots q_{n-1}q_n$ valeurs de ρ infiniment peu différentes de l'unité, et, en vertu des relations (3) et (5), $q_1q_2 \dots q_{n-1}q_n$ groupes de valeurs infiniment petites de $\xi, \eta, \zeta, \dots, \sigma, \tau$ et λ.

En outre, dans l'hypothèse où nous raisonnons, d'équations ne présentant pas d'autres particularités que de manquer respectivement des termes de degrés inférieurs à $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$, il est facile de voir que les valeurs correspondantes de l et λ sont du même ordre infinitésimal.

En effet, des équations (3), (4) et (5), on tire immédiatement

$$\lambda = \rho l + k(\rho - 1),$$

d'où

$$\frac{\lambda}{l} = \rho + k\frac{\rho - 1}{l}$$

Le rapport $\frac{\lambda}{l}$ aura une valeur finie, et, par suite, λ et l seront du même ordre infinitésimal, si le rapport $\frac{\rho-1}{l}$ est infiniment petit, ou bien s'il a une valeur finie, mais différente de $-\frac{1}{k}$.

Or, en vertu de l'équation (4), $x, y, z, \dots, s, t$ ne peuvent être toutes ensemble d'un ordre infinitésimal inférieur ou supérieur à celui de l, et, comme aucune particularité ne distingue ces variables les unes des autres dans les $n-1$ premières équations (1), nous sommes certains qu'elles seront toutes du même ordre infinitésimal que l.

Cela posé, après avoir substitué dans (2) les valeurs de $\xi, \eta, \zeta, \dots, \sigma, \tau$ résultant des équations (3), divisons par l^{q_n} : nous obtenons une équation de degré q_n en $\frac{\rho-1}{l}$ dans laquelle le coefficient de $\left(\frac{\rho-1}{l}\right)^{q_n}$ est, à un infiniment petit près, égal au résultat de la substitution de a à x, b à y, etc., g à s, h à t, dans l'ensemble des termes de degré q_n de la $n^{\text{ème}}$ équation (1).

Comme $a, b, c, \dots, g, h$ peuvent être choisis arbitrairement, on pourra toujours faire en sorte que ce coefficient ne soit pas nul : l'équation en $\frac{\rho-1}{l}$ aura, par suite, q_n racines finies. De plus, k pouvant être quelconque et n'avoir aucune relation avec les coefficients de l'équation en $\frac{\rho-1}{l}$, il est évident qu'aucune des racines de cette équation ne sera égale à $-\frac{1}{k}$.

Nous pouvons donc affirmer que, dans l'hypothèse admise au début de cette démonstration, à une valeur infiniment petite de l correspondent $q_1q_2 \dots q_n$ valeurs finies de $\frac{\lambda}{l}$, et, par suite, que les valeurs correspondantes de λ et l sont du même ordre infinitésimal.

Cela posé, en considérant respectivement l et λ comme l'abscisse et l'ordonnée d'une courbe définie par l'équation (6), on déduit immédiatement de ce qui précède que cette courbe a un point multiple d'ordre $q_1q_2\ldots q_{n-1}q_n$ à l'origine des coordonnées. D'où il suit que la droite $l=\lambda$, rencontrant la courbe à l'origine en un nombre de points au moins égal à $q_1q_2\ldots q_n$, ne la rencontre plus en dehors de l'origine qu'en un nombre de points au plus égal à

$$p_1p_2\cdots p_n - q_1q_2\cdots q_n + \pi,$$

π ayant d'ailleurs la signification donnée précédemment (art. III). En déduisant de ce nombre le nombre π des valeurs égales de l et λ auxquelles ne correspondent pas des valeurs égales de x et ξ, y et η, z et ζ, etc., s et σ, t et τ, c'est-à-dire des solutions du système (1), on voit finalement que le nombre de ces solutions, abstraction faite de la solution ($x=0, y=0, \ldots, s=0, t=0$), est au plus égal à

$$p_1p_2\cdots p_n - q_1q_2\cdots q_n \quad (*).$$

X. Revenons maintenant au théorème que nous avons énoncé ci-dessus (art. IX), et supposons que x entre dans les équations (1) à des degrés $m_1, m_2, \ldots, m_n$, respectivement moindres que $p_1, p_2, \ldots, p_n$, ces équations n'offrant d'ailleurs aucune autre particularité. Prenons n nouvelles variables $x', y', z', \ldots, s', t'$ liées à $x, y, z, \ldots, s, t$, par les relations

$$(10) \qquad x=\frac{1}{x'},\ y=\frac{y'}{x'},\ z=\frac{z'}{x'},\ \ldots,\ s=\frac{s'}{x'},\ t=\frac{t'}{x'}.$$

Par la substitution de ces expressions dans les équations (1), on obtiendra un nouveau système d'équations à n inconnues, dont les degrés seront respectivement égaux à ceux des équations dont elles dérivent, c'est-à-dire à $p_1, p_2, \ldots, p_n$, et dans lesquelles manqueront les termes de degré inférieur à p_1-m_1 pour la première, p_2-m_2 pour la seconde, etc., p_n-m_n pour la $n^{\text{ème}}$ (**). D'après ce que nous avons vu ci-dessus (art. IX), ce système d'équations admettra la solution

$$x'=0,\ y'=0,\ \ldots,\ s'=0,\ t'=0$$

à un degré de multiplicité au moins égal à

$$(p_1-m_1)(p_2-m_2)\ \ldots\ (p_{n-1}-m_{n-1})(p_n-m_n).$$

Or, d'après la première des relations (10), à chaque valeur infiniment petite de x' correspond une valeur infiniment grande de x et réciproque-

(*) Voir la note I à la fin du mémoire.
(**) Voir la démonstration de ce fait à la note II, à la fin du mémoire.

ment. Il y aura donc une solution du système (1) d'un degré de multiplicité au moins égal à

$$(p_1-m_1)(p_2-m_2)\ \cdots\ (p_{n-1}-m_{n-1})(p_n-m_n)$$

qui correspondra à une valeur infiniment grande de x ; et le nombre indiquant ce degré de multiplicité devra être déduit de $p_1p_2\ldots p_{n-1}p_n$, si l'on veut avoir le nombre des solutions, en valeurs finies, du système (1).

XI. Les propositions que nous avons démontrées ci-dessus peuvent se résumer de la manière suivante :

Si l'on désigne par $p_1, p_2, \ldots, p_{n-1}, p_n$ les degrés respectifs de n équations algébriques à pareil nombre d'inconnues, par $m_1, m_2, \ldots, m_{n-1}, m_n$ les degrés les plus élevés auxquels l'une quelconque de ces inconnues entre dans ces diverses équations, par ω le nombre des solutions en valeurs finies communes à ces équations réduites chacune à leurs termes du degré le plus élevé, et dans lesquelles l'une de ces inconnues est remplacée par l'unité, le nombre des solutions, en valeurs finies, du système des équations ainsi définies est égal à

$$p_1p_2\ \cdots\ p_{n-1}p_n-\sum\Big[(p_1-m_1)(p_2-m_2)\ \cdots\ (p_{n-1}-m_{n-1})(p_n-m_n)\Big]-\omega,$$

$\sum$ désignant la somme des produits analogues à $(p_1-m_1)(p_2-m_2)\ \ldots$ qui se rapportent aux diverses inconnues $x, y, z, \ldots, s, t$.

L'expression ci-dessus est en même temps une limite supérieure du degré de l'équation finale que l'on obtiendrait, en éliminant, entre les équations données, toutes les inconnues moins une.

Si l'on suppose de plus que les n équations données manquent respectivement des termes de degré inférieurs à $q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n$, le degré de l'équation finale est susceptible de s'abaisser à

$$p_1p_2\cdots p_{n-1}p_n-\sum\Big[(p_1-m_1)(p_2-m_2)\ \cdots\ (p_{n-1}-m_{n-1})(p_n-m_n)\Big]$$
$$-q_1q_2\ \cdots\ q_{n-1}q_n-\omega.$$

NOTE 1

Au sujet du point multiple de la courbe

$$\varphi(l,\lambda)=0$$

qui coïncide avec l'origine des coordonnées, on peut remarquer que le nombre des points d'intersection de cette courbe et de la droite

$$l=\lambda,$$

qui sont réunis à l'origine, pourra, dans certains cas, être superieur à $q_1 q_2 \ldots q_n$. Ce fait se présentera lorsqu'une ou plusieurs branches de la courbe auront avec la droite, à l'origine, un contact d'un ordre plus ou moins élevé; ou, autrement dit, lorsqu'une ou plusieurs valeurs de $\frac{\lambda - l}{l}$ seront infiniment petites en même temps que l.

En s'appuyant sur un théorème dû à M. Halphen (*Bulletin de la Société mathématique*, t. I, p. 132), on peut même voir immédiatement que *le nombre des points d'intersection de la courbe et de la droite $l = \lambda$, et par suite le nombre des solutions, en valeurs infiniment petites, du système* (1), *sera égal à la somme des ordres des valeurs de $\lambda - l$, correspondant à une valeur infiniment petite de l considéré comme infiniment petit principal.*

Cela posé, de la relation

$$\lambda = \rho l + k(\rho - 1)$$

on déduit

$$\frac{\lambda - l}{l} = \rho - 1 + k\frac{\rho - 1}{l}.$$

Cette dernière équation nous montre que $\frac{\lambda - l}{l}$ et $\frac{\rho - 1}{l}$ ne diffèrent que d'une quantité infiniment petite par rapport à eux, ou, autrement dit, sont du même ordre infinitésimal.

Par suite, on peut dire que *le nombre des solutions, en valeurs infiniment petites, du système* (1), *est égal à la somme des ordres des valeurs de $\rho - 1$, correspondant à une valeur infiniment petite de l, pris pour infiniment petit principal.*

L'équation en $\rho - 1$ peut s'écrire

$$f_n[\rho x + a(\rho - 1), \rho y + b(\rho - 1), \ldots, \rho t + h(\rho - 1)] = 0.$$

Du développement par la formule de Taylor, il résulte que le produit des racines de cette équation en $\rho - 1$, qui correspondent à un système quelconque de valeurs de $x, y, z, \ldots, s, t$, est, à un facteur constant près,

$$f_n(\rho x, \rho y, \rho z, \ldots, \rho s, \rho t),$$

ou, plus simplement,

$$f_n(x, y, z, \ldots, s, t),$$

en remarquant que ρ tend vers 1, lorsque l tend vers 0.

Le produit V des valeurs de $\rho - 1$, correspondant aux diverses solutions en x, y, z, ..., s, t, du système formé des $n-1$ premières équations (1) et de l'équation (4), sera

$$V = \Pi_{i=1}^{i=P}\Big[f_n(x_i, y_i, z_i, \ldots, s_i, t_i)\Big],$$

P désignant le nombre des solutions de ce système d'équations

Or, cette dernière expression est, à un facteur constant près, égal au premier membre de la résultante du système formé des équations (1) et de l'équation (4).

Cette résultante, une fois formée, donnera la valeur de V en fonction de l; et, en considérant ce paramètre comme infiniment petit principal, le degré le moins élevé de l dans V sera égal à l'ordre infinitésimal de V, c'est-à-dire, d'après ce qui précède, au nombre des solutions, en valeurs infiniment petites, du système (1).

A la vérité, le problème ayant pour objet la recherche de l'ordre infinitésimal de V semble, au premier aspect, aussi compliqué que celui qui consisterait à former l'équation finale du système (1). Mais il est facile de voir qu'il se simplifie notablement par suite de la faculté que l'on a de négliger, dans les équations (1), un certain nombre de termes.

En effet, soit $(x_i, y_i, z_i, \ldots, s_i, t_i)$ une solution du système formé des $n-1$ premières équations (1) et de l'équation (4), pour une valeur infiniment petite de l. Il est bien clair que, quels que soient les ordres infinitésimaux respectifs de x_i, y_i, z_i, ..., s_i, t_i, un terme tel que

$$Rx_i^\alpha y_i^\beta z_i^\gamma \ldots s_i^\mu t_i^\nu,$$

appartenant à l'une quelconque des équations (1), sera d'un ordre infinitésimal moindre que le terme

$$R'x_i^{\alpha'} y_i^{\beta'} z_i^{\gamma'} \ldots s_i^{\mu'} t_i^{\nu'}$$

appartenant à la même équation, et pour lequel on aurait

$$\alpha' > \alpha,\ \beta' > \beta,\ \gamma' > \gamma, \ldots,\ \mu' > \mu,\ \nu' > \nu,$$

un ou plusieurs de ces exposants pouvant d'ailleurs être nuls.

Pour le but que l'on se propose, on pourra négliger ce dernier terme et tous ceux d'une même équation qui se trouveront dans le même cas.

Cette simple remarque permettra de supprimer un assez grand nombre de termes dans les équations proposées et d'arriver assez fréquemment dans la pratique à la détermination exacte et complète du nombre des solutions, en valeurs infiniment petites, d'un système d'équations données.

NOTE II

Considérons une équation de degré p à n variables $x, y, z, \ldots, s, t$, dans laquelle x n'entre qu'au degré $m < p$, et supposons-la ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x. Elle sera de la forme

$$(10) \qquad \chi_p(y,z,\ldots,s,t) + x\chi_{p-1} + x^2\chi_{p-2} + \cdots + x^m\chi_{p-m} = 0,$$

$\chi_p, \chi_{p-1}, \ldots, \chi_{p-m}$ désignant des polynômes en $y, z, \ldots, s, t$, de degrés respectivement égaux à $p, p-1, \ldots, p-m$.

Remplaçons dans (10) les variables $x, y, z, \ldots, s, t$, par d'autres $x', y', z', \ldots, s', t'$, liées aux premières par les relations

$$x = \frac{1}{x'}, \; y = \frac{y'}{x'}, \; \ldots, \; t = \frac{t'}{x'},$$

et multiplions par x'^p.

Il est facile de voir qu'un groupe quelconque de l'équation (10), le groupe $x^q\chi_{p-q}$ par exemple, donnera lieu à un polynôme de degré $p-q$, homogène par rapport à $x, y, z, \ldots, s, t$; car

$$x^p\chi_{p-q}(y,z,\ldots,s,t)$$

deviendra, par suite de la substitution des nouvelles variables,

$$\frac{1}{x'^q}\chi_{p-q}\left(\frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}, \ldots, \frac{s'}{x'}, \frac{t'}{x'}\right),$$

ou bien, en multipliant par x'^p,

$$x'^{p-q}\chi_{p-q}\left(\frac{y'}{x'}, \frac{z'}{x'}, \ldots, \frac{s'}{x'}, \frac{t'}{x'}\right),$$

polynôme homogène de degré $p-q$ en $x', y', z', \ldots, s', t'$, et complet comme celui dont il dérive.

On voit donc qu'au moyen de la transformation employée, l'équation (10) sera devenue une nouvelle équation de degré p en $x', y', z', \ldots, s', t'$, dont la seule particularité consistera à n'avoir aucun terme d'un degré inférieur à $p-m$.