BULLETIN DE LA S. M. F.

G. HALPHEN

Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 11-33
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__11_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

Mémoire sur la détermination des coniques et des surfaces du second ordre; par M. Halphen (*).

(Séance du 19 mars 1873)

TROISIÈME PARTIE

I. — DES SYSTÈMES DE CONIQUES DANS L'ESPACE.

Pour déterminer une conique dans l'espace, 8 conditions sont nécessaires. Les coniques qui satisfont à 7 conditions communes forment un *système*. M. Chasles a consacré à l'étude de ces systèmes un travail inséré aux *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXI, p. 389. Il y fait remarquer, tout d'abord, que la perspective plane d'un système de coniques de l'espace est un système plan de coniques. Les deux caractéristiques de ce dernier marquent le nombre des coniques, du système de l'espace, *qui rencontrent une droite* ou *touchent un plan*. Les droites-coniques du système plan sont, les unes, les perspectives des droites-coniques du système de l'espace, les autres, les perspectives des coniques propres dont le plan passe par l'œil. Le nombre de ces dernières doit encore, d'après M. Chasles,

(*) Voir, pour la deuxième partie, t. I, p. 226.

être considéré comme une caractéristique du système de l'espace : c'est la classe de la surface développable enveloppée par les plans des coniques du système. Ce nombre ne marque pas la valeur totale des droites-coniques du système plan qui sont la perspective de ces coniques de l'espace. Je montrerai, en effet, qu'il en est précisément la moitié. Cette proposition, très-simple à établir par l'application des principes posés dans la 1re partie de ce mémoire, me permettra de trouver, pour les systèmes de coniques de l'espace, un théorème analogue à celui de M. Chasles relativement aux systèmes plans. Ce théorème est entièrement nouveau ; car l'état actuel de la question ressort très-clairement des lignes suivantes, empruntées au travail de M. Chasles, cité plus haut : « *En énonçant ici quelques propriétés générales des systèmes de coniques, qui s'expriment par une fonction linéaire des nombres qui caractérisent le système, nous n'entendons pas induire à penser qu'il doive toujours en être ainsi, comme cela a lieu dans la théorie des coniques sur le plan, pour les deux nombres que nous avons appelés les* caractéristiques *du système* (*). »

Cette proposition, que l'illustre créateur de la théorie des caractéristiques n'a pas cru devoir énoncer, est cependant exacte; et l'on peut dire que :

Dans un système de coniques de l'espace, μ étant le nombre de celles qui rencontrent une droite, ν le nombre de celles qui touchent un plan, ρ le nombre de celles dont le plan passe par un point; $\alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho$ est le nombre de celles qui satisfont à une condition indépendante du système, les nombres α, β, γ ne dépendant que de cette condition.

Je vais démontrer, tout d'abord, que, ainsi que je l'ai annoncé plus haut, *dans un système plan, perspective d'un système de l'espace, une droite-conique, perspective d'une conique dont le plan passe par l'œil, a pour valeur le nombre* 2.

Soit Q un plan fixe, O un point dans ce plan, m et m' les points où une conique C du système rencontre le plan Q. Quand la conique C varie, les droites Om et Om' forment deux faisceaux se correspondant, de telle manière qu'à une droite de l'un des faisceaux correspondent μ droites de l'autre. Deux droites correspondantes coïncident : 1° si la conique touche le plan Q; 2° si la conique C se réduit à une droite-conique ; 3° si son plan passe au point O. Par conséquent, si ν et ω sont les nombres des coïncidences dues aux deux premiers cas, $2\mu - \nu - \omega$ est celui des coïncidences dues au troisième. Je vais montrer que ce dernier nombre est aussi égal à 2ρ.

Soient, en effet, M et M' les deux points, en ligne droite avec O, en lesquels rencontre Q une conique C du système dont le plan passe en O. Construisons une courbe plane (A) dont les coordonnées x, y soient les tangentes des

(*) *Loc. cit.*, p. 394.

angles que font avec cette droite OM deux droites correspondantes Om, Om'. Cette courbe passe à l'origine des coordonnées. Comme, de plus, il n'y a, en outre de la conique C, que $\mu - 2$ coniques du système qui rencontrent OM, chacun des deux axes de coordonnées a 2 de ses points d'intersection avec (A) confondus à l'origine. Déterminons les tangentes en ce point. Soit B le point où la droite MM′ touche l'enveloppe des droites mm'. On voit bien aisément que les tangentes x et y des angles que font avec OM deux droites Om, Om', correspondantes et infiniment voisines de OM, OM′, sont liées par la relation : $\frac{x}{y} = \frac{OM'}{OM}\,\frac{CM}{CM'}$. Il en résulte, comme le point est quelconque sur le plan Q, que ce rapport a une valeur quelconque, et que l'origine des coordonnées est un point double de la courbe A, où les tangentes, symétriques par rapport à la bissectrice des axes, font des angles quelconques avec les axes. Par suite, le point O absorbe 2 points d'intersection de la courbe (A) avec la bissectrice des axes. Donc la droite OM compte pour 2 couples de droites correspondantes confondues. Il en est de même des autres droites analogues, passant par les couples de points m, m' appartenant aux $\rho - 1$ autres coniques, dont les plans contiennent le point O. Donc le nombre des coïncidences absorbées par ces droites est égal à 2ρ. On a donc enfin : $2\mu - \nu - \omega = 2\rho$.

Cette relation démontre la proposition annoncée. Mais il ne sera pas inutile de donner une autre démonstration, grâce à laquelle on verra plus nettement que ω est bien la valeur totale des droites-coniques du système plan, perspectives de droites-coniques.

Si l'on cherche les coniques du système de l'espace, telles que les deux droites Om, Om', menées du point O aux points d'intersection d'une même conique avec le plan Q, forment un faisceau harmonique avec deux droites On, On', on les trouve par les points d'intersection de la courbe (A) avec une hyperbole dont les asymptotes sont parallèles aux axes des x et des y, et dont le centre est sur la bissectrice de ces axes. On a ainsi 2μ points d'intersection des deux courbes, qui répondent à μ coniques du système. Si l'une des droites On coïncide avec Om, l'hyperbole passe à l'origine des coordonnées, qui compte alors pour 2 points d'intersection des deux lignes. On en conclut donc que la conique C, qui passe aux points M et M′, compte pour 1 conique du système satisfaisant à la question. Par suite, si la droite On est donnée infiniment voisine de Om, il existe *une seule* conique du système, qui coupe le plan Q en deux points m et m' infiniment voisins de On.

Faisons la perspective du système, en plaçant l'œil en O. Soit P le plan de la conique C, et D la trace de ce plan sur le tableau. D est la droite-conique, perspective de C. D'après ce qui vient d'être dit, si l'on considère un segment, situé sur la trace du plan Q, et dont une extrémité soit infiniment voisine de D, il y a *une seule* conique du système infiniment aplatie qui divise harmoniquement ce segment. Pour avoir la valeur de la droite-conique D, il faut, d'après les principes posés plus haut (1^re partie, p. 136), placer l'extrémité de ce segment à distance infiniment petite du 1^er ordre de D, et chercher quel est l'ordre du carré du segment intercepté par la conique infiniment aplatie. Or x et y étant, comme plus haut, les tangentes des angles que font avec OM les droites Om, Om', correspondantes, on a vu que si ces variables sont infiniment petites, leur rapport est un nombre quelconque. Par suite, la conjuguée harmonique d'une droite On' arbitraire du plan Q, par rapport à ces deux droites Om, Om', infiniment voisines de OM, fait, avec OM, un angle du même ordre que x et y. Par suite, dans le système plan, une conique infiniment aplatie, voisine de D, intercepte sur la droite donnée un segment du même ordre que la distance de l'extrémité de cette droite à D. Cette dernière distance étant du 1^er ordre, le carré du segment est du 2^me ordre ; et la droite-conique D a le nombre 2 pour valeur. Donc, si ω est la valeur totale des droites-coniques du système plan, perspectives de droites-coniques, la valeur totale de toutes ses droites-coniques est $\omega + 2\rho$. On a donc

$$\nu = 2\mu - 2\rho - \omega$$

Passons maintenant à la recherche du nombre des coniques d'un système de l'espace, qui satisfont à une condition simple.

Soit Σ une surface du 2^me ordre, passant par l'œil O. Pour chaque conique C du système proposé, construisons les a coniques B qui satisfont à la condition donnée et passent aux quatre points d'intersection de C et de Σ. Nous formons ainsi un second système (B), dont chaque conique correspond à une conique du système proposé (C). Soient L et L′ les deux droites de la surface Σ passant en O. Sur la droite d'intersection du plan de deux coniques B et C correspondantes et du plan des droites L et L′, ces deux coniques et ces deux droites déterminent une involution. Par suite, si l et l' sont les tracés des droites L et L′ sur le tableau, les coniques b et c, perspectives des coniques B et C, déterminent, avec les points l et l', une involution sur la droite ll'.

Par suite, les indicatrices, relatives à la droite ll', des deux systèmes (c) et (b), perspectives des systèmes (C) et (B) se correspondent de la manière définie au théorème III (1^re partie, p. 133). A chaque point de l'indicatrice de (c) correspondent a points de l'indicatrice de (b), situés sur la droite qui joint le premier au point fixe, qui représente les deux points l et l'. De plus, l'indicatrice de (b) passe en ce point fixe. Il existe, en effet, des coniques B situées sur la surface Σ, et rencontrant, par conséquent, les deux droites L et L′. Car les plans des coniques C déterminent, par leurs intersections avec Σ, un système de coniques, dont il existe un nombre fini satisfaisant à la condition donnée.

Si donc n est le nombre de ces coniques, l'indicatrice du système (b) a le point fixe pour point multiple d'ordre n. Par suite, d'après le théorème III, le nombre des couples de points correspondants des deux indicatrices, qui sont confondus, est $a\mu + n$, puisque μ est le degré de l'indicatrice du système (c) (1[re] partie, p. 134). Donc, si l'on retranche de ce nombre, $a\mu + n$, le nombre des couples de points correspondants confondus, afférents aux droites-coniques communes aux deux systèmes, on aura le nombre cherché des coniques propres communes à ces systèmes.

Désignons par b, comme plus haut (p. 140), le nombre des coniques infiniment aplaties satisfaisant à la condition donnée, et passant en quatre points d'un même plan, formant deux couples de points infiniment voisins. Les droites-coniques du système (c), perspectives des droites-coniques du système (C), auront chacune, parmi leurs correspondantes, b coniques infiniment aplaties; et, d'après le raisonnement fait plus haut (p. 141), ces droites-coniques absorberont $b\omega$ coniques communes aux deux systèmes.

En second lieu, à chaque conique du système (C), dont le plan passe par l'œil, correspondent a coniques du système (B), situées dans le même plan. Par suite, les droites-coniques du système (c), perspectives de coniques propres, absorbent $2a\rho$ coniques communes aux deux systèmes.

Donc le nombre des coniques cherchées est : $a\mu + n - b\omega - 2a\rho$. Il s'agit maintenant de déterminer le nombre n, qui est celui des coniques du 2[me] ordre, dont les plans sont tangents à une développable de classe ρ, et qui satisfont à la condition donnée.

Les coniques, qui satisfont à la condition donnée et sont sur une surface du 2[me] ordre donnée, contiennent *deux* arbitraires. Leurs plans enveloppent donc une surface. Soit c la classe de cette surface. Il y a $c\rho$ plans tangents communs à cette surface et à la développable de classe ρ. Donc le nombre n est égal à $c\rho$.

On a donc enfin, en tenant compte de la valeur de ω et de celle de n, pour le nombre N cherché :

$$N = (a - 2b)\,\mu + b\nu + (2b + c - 2a)\,\rho = \alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho,$$

ce qui est l'expression du théorème annoncé plus haut.

Il n'est pas sans utilité de remarquer que les nombres α et β sont ici les mêmes que ceux qui figurent dans l'expression $\alpha\mu + \beta\nu$ du nombre des coniques qui satisfont à la condition donnée, et font partie d'un système plan.

II. — DROITES-CONIQUES DANS LES COMPLEXES DE L'ESPACE.

Pour déterminer une conique dans l'espace, 8 conditions sont nécessaires. Les coniques qui satisfont à 7 conditions données forment un *système;* à

6 conditions, un *complexe du 6^{me} ordre; ...*; à n conditions, un *complexe du n^{me} ordre.*

Les coniques d'un complexe d'ordre n contiennent $8-n$ arbitraires; celles d'entre elles qui ont un axe d'une grandeur donnée contiennent $7-n$ arbitraires. La grandeur d'un axe étant donnée, on peut, pour définir une conique, considérer la position de l'autre axe et des sommets situés sur cet axe, et le plan de la courbe. Ces éléments contiennent $7-n$ arbitraires dans un complexe d'ordre n. Il en est de même si la grandeur donnée d'un axe est nulle. Ainsi les droites-coniques d'un complexe d'ordre n contiennent $7-n$ arbitraires dans la définition de leur position, de leurs sommets, et de leur plan.

Dans un complexe du 1^{er} ordre, les coniques qui sont sur un plan y constituent un complexe plan du 1^{er} ordre. Les droites-coniques de 1^{re} espèce de tous les complexes plans analogues seront les droites-coniques de 1^{re} espèce du complexe de l'espace; et de même celles de 2^{me} espèce des complexes plans seront celles de 2^{me} espèce du complexe de l'espace. On en conclut aisément que les droites-coniques de 1^{re} espèce sont celles où les sommets sont arbitraires, et qui ne contiennent que 4 indéterminées dans leur position et celle de leur plan. Elles coïncident donc avec toute droite de l'espace, et, dans ce cas, le plan de chacune d'elles est déterminé: ou bien elles forment un complexe de droites (droites assujetties à une condition), et le plan de chacune d'elles est indéterminé. Les droites-coniques de 2^{me} espèce coïncident avec toute droite de l'espace, le plan de chacune d'elles est indéterminé, et ses deux sommets contiennent une arbitraire.

En général, dans un complexe du n^{me} ordre, on distinguera 3 espèces de droites-coniques, de la manière suivante : une droite-conique est une figure formée d'une droite terminée à deux extrémités ou sommets, et d'un plan passant par cette droite. Cette figure contient, dans un complexe du n^{me} ordre, $7-n$ arbitraires. La 1^{re} espèce de droites-coniques est celle qui est composée de telles figures où la droite et le plan contiennent seulement $5-n$ arbitraires : les sommets y sont arbitraires. La 2^{me} espèce est composée de figures où la droite et le plan contiennent $6-n$ arbitraires; les sommets contiennent une arbitraire. Dans la 3^{me} espèce, la droite et le plan contiennent $7-n$ arbitraires, et les sommets sont déterminés.

Dans un complexe du 6^{me} ordre, il n'y a que deux espèces de droites-coniques, la 2^{me} et la 3^{me}. Enfin, pour la régularité des expressions, nous devrons considérer les droites-coniques d'un système comme de 3^{me} espèce.

D'un complexe de coniques, on peut, d'une infinité de manières, déduire d'autres complexes d'ordre moindre qui comprennent le proposé.

Par les points d'intersection d'une conique A et d'une surface du 2^{me} ordre Σ, faisons passer des coniques B. Supposons que la conique A varie dans toute l'étendue d'un complexe (A) d'ordre i; les coniques B engendrent alors un complexe (B), d'ordre $i-1$. Ce dernier a pour droites-coniques celles de (A), et, en outre, les cordes de contact des coniques A bitangentes à Σ. On voit aisément que ces dernières, avec leurs plans, contiennent $6-i$ arbitraires, c'est-à-dire qu'elles forment une suite de droites-coniques de 1[re] espèce de (B). Dans cette suite sont comprises les droites-coniques de 1[re] espèce de (A). Les droites-coniques de 2[me] espèce de (A) forment une autre série distince de droites-coniques de 1[re] espèce de (B); enfin les droites-coniques de 3[me] espèce de (A) forment des droites-coniques de 2[me] espèce de (B). Ainsi le complexe (B) ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la 2[me] espèce. Si (A) est dans le même cas, (B) ne contient plus de droites-coniques au-dessus de la 1[re] espèce.

Par les 4 points (σ) d'intersection d'une conique B avec la surface Σ, il ne passe, en général, qu'une conique A. Par suite, les deux points (p), où une conique A rencontre un plan fixe P, sont déterminés d'une seule manière par les points (σ) où elle coupe la surface Σ. Pour exprimer algébriquement cette dépendance entre les points (p) et les points (σ), remarquons que, les points (σ) étant donnés, la position des points (p) est définie si l'on donne la distance δ du milieu de leur segment au point où l'intersection du plan des points (σ) et du plan P rencontre une droite fixe du plan P. La distance δ et la condition que les points (p) et (σ) soient sur une même conique déterminent, en effet, d'une seule manière le couple de points (p). Il existe donc, entre δ et les variables définissant la position des points (σ), une relation du 1[er] degré en δ, c'est-à-dire de la forme $v\delta-u=0$, v et u étant des fonctions des variables définissant les points (σ). Il est clair qu'on peut supposer que u et v ne sont pas constamment nuls lorsqu'on assigne aux points (σ) toutes les positions compatibles avec le complexe (A); car, si cela était, on pourrait substituer à la relation $v\delta-u=0$ une autre relation de même forme, où ce fait n'arriverait pas. Si l'on joint à cette relation les $i-1$ relations $w=0$ qui ont lieu entre les 7 arbitraires définissant la position des points (σ), on a toutes les équations de condition définissant le complexe (A). Les $i-1$ équations telles que $w=0$ définissent le complexe (B); et, en général, n équations, n'ayant lieu qu'entre les arbitraires des points (σ), définissent un complexe d'ordre n, tel que, par chaque groupe de points (σ), passent une infinité de coniques du complexe. En d'autres termes, ce complexe peut être considéré comme déduit d'un complexe d'ordre $n+1$, de la même façon que B est déduit de (A).

La relation $v\delta-u=0$ définit un complexe du 1[er] ordre (K_1), qui contient le complexe du 2[me] ordre (K_2), défini par les relations $v=0$, $u=0$.

Les deux complexes (B) et (K_1), d'ordre $i-1$ et 1, ont en commun le complexe (A) d'ordre i. Mais, en général, ils ont en commun, en outre, un autre complexe du même ordre. Pour que deux coniques B et K_1 coïncident, il faut, comme on le reconnaît immédiatement, qu'elles coïncident avec une conique A, ou qu'elles appartiennent au complexe (K_2). Donc, si le complexe (A) ne comprend pas toutes les coniques communes à (B) et à (K_1), il faut que les deux complexes (B) et (K_2) aient en commun un complexe d'ordre i, ou d'ordre inférieur. Ce dernier cas ne saurait avoir lieu : il faudrait, en effet, pour qu'il eût lieu, que les deux équations $v = 0$, $u = 0$ rentrassent dans le système des équations $w = 0$, c'est-à-dire que v et u fussent nuls; dès que les points (σ) satisfont aux équations $w = 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse faite plus haut.

Si la surface Σ est quelconque, il y a effectivement un complexe autre que (A) commun à (B) et à (K_1). Il suffit, pour le prouver, de montrer qu'il existe des coniques communes à ces deux complexes, qui n'appartiennent pas à (A). Or on en obtient en prenant celles qui satisfont aux relations $w = 0$ et $u = 0$, $v = 0$. Donc les complexes (B) et (K_2) ont effectivement en commun un complexe (A'), d'ordre i. C'est-à-dire que les $i + 1$ équations $u = 0$, $v = 0$, $w = 0, \ldots$ se réduisent à i équations, qui n'ont lieu qu'entre les coordonnées des points (σ).

Le complexe (A'), défini de cette façon, peut être considéré comme déduit d'un complexe (A_1), de l'ordre $i + 1$, de la même manière que (B) est déduit de (A). Par conséquent, (A') ne contient pas de droites-coniques de 3^{me} espèce. On peut donc énoncer la proposition suivante :

A tout complexe de coniques, d'ordre i, on peut joindre un autre complexe du même ordre ne contenant pas de droites-coniques de 3^{me} espèce, et tel que l'ensemble de ces deux complexes constitue le complexe complet commun à deux complexes séparés du 1er ordre et d'ordre $i - 1$.

Mais on peut aller plus loin et déduire, d'une manière analogue, du complexe (A') un autre complexe du même ordre qui ne contienne de droites-coniques ni de la 3^{me}, ni de la 2^{me} espèce.

D'un complexe (C) d'ordre j, on peut déduire un complexe (D) d'ordre $j - 2$, qui contienne (C), en imposant aux coniques D de rencontrer une surface du 2^{me} ordre Σ en 3 points par où l'on puisse mener une conique C. Il est très-aisé de voir que la plus haute espèce des droites-coniques de (C) est la 1re ; c'est-à-dire que chaque droite-conique de ce complexe, avec son plan, ne contient pas plus de $5 - (j - 2)$ arbitraires.

Par 3 points (σ) d'intersection d'une conique C avec Σ, il ne passe pas, en général, d'autre conique du complexe (C), en sorte que le 4^{me} point σ_1 est déterminé d'une seule manière par les 3 autres. Ce 4^{me} point peut être défini par la condition d'être dans le plan des 3 autres et par une coordonnée qui, cette condition remplie, le détermine d'une seule manière. Cette coordonnée sera, si l'on veut, la position du point où la génératrice rectiligne de Σ, passant en σ_1, rencontre une directrice rectiligne fixe de cette surface. Cette coordonnée x sera donc liée aux arbitraires des 3 autres points par une relation telle que $tx - s = 0$, où t et s ne contiennent que les coordonnées de 3 points (σ).

Si l'on applique ces résultats aux complexe (A_1), on voit que la relation $tx - s = 0$, jointe au complexe (D), définit le complexe (A'). Les équations qui définissent le complexe (D) sont $i - 1$ équations telles que $z = 0$, z ne contenant que les coordonnées de 3 points (σ), situés sur la surface Σ. On conclura, comme plus haut, que le complexe commun à (D) et au complexe (K'_1), défini par $tx - s = 0$, se compose du complexe (A') et d'un complexe (A'') de même ordre i, et défini par les relations $t = 0$, $s = 0$, $z = 0 \ldots$, au nombre de $i + 1$, qui se réduisent à i relations entre les coordonnées de 3 points (σ). Par suite, (A'') se déduit d'un complexe d'ordre $i + 2$, comme (D) de (C). Donc ce complexe (A'') ne contient pas de droites-coniques de 3^me^, ni de 2^me^ espèce.

On peut représenter cette dépendance des complexes ci-dessus de la manière suivante : (A) et (A') constituant le complexe complet commun à (B) et (K_1), on écrira

$$(A) + (A') = (B, K_1),$$

et de même

$$(A') + (A'') = (D, K'_1);$$

d'où

$$(A) + (D, K'_1) = (A'') + (B, K_1).$$

En considérant une conique comme un élément de l'espace, ainsi que Plücker l'a fait pour la ligne droite, on peut désigner les coniques, en nombre fini ou infini, communes à deux complexes, comme l'*intersection* de ces complexes. L'ensemble de *toutes* les coniques communes à deux complexes sera dite l'*intersection complète* de ces complexes. Avec ces définitions, la relation ci-dessus peut être énoncée de la manière suivante :

Théorème I. — *A tout complexe de coniques, d'ordre i, on peut joindre l'intersection complète de deux complexes d'ordre 1 et $i - 1$, tels que l'ensemble de ces deux complexés, d'ordre i, se compose de l'intersection complète de deux complexes d'ordre 1 et $i - 1$, et d'un autre complexe d'ordre i, ne contenant pas de droites-coniques de 3^me^, ni de 2^me^ espèce.*

On peut remarquer, d'après la manière dont ce résultat a été obtenu, que (B) ne contient pas de droites-coniques de 3^me^ espèce, et que (D) n'en contient ni de 2^me^, ni de 3^me^ espèce.

A peine est-il besoin d'ajouter que les mêmes propriétés appartiennent aux complexes plans de coniques.

Le théorème que je viens de démontrer va permettre d'établir avec une grande facilité les trois théorèmes, relatifs aux coniques dans l'espace, qui sont les analogues du théorème de M. Cremona pour les coniques dans le plan. On verra sans peine que la même démonstration pourrait s'appliquer à ce dernier. De même aussi on pourrait démontrer les trois théorèmes dont il s'agit par des procédés analogues à celui que j'ai employé, dans la 2me partie, pour démontrer le théorème de M. Cremona. Mais cette démonstration entraînerait à des développements fastidieux, que l'on évite en suivant la marche qui va être exposée.

III. — CONIQUES COMMUNES A DEUX COMPLEXES.

Le théorème démontré au début de cette 3me partie fait connaître le nombre des coniques communes à un système et à un complexe du 1er ordre, ou *le nombre des intersections* du système et du complexe. Je vais m'occuper maintenant de la recherche de ce même nombre pour deux complexes dont la somme des ordres est égale à 8. Voici l'énoncé du théorème unique qui renferme la solution du problème.

THÉORÈME II. — *Le nombre des coniques d'un complexe d'ordre i, qui appartiennent en même temps à un autre complexe d'ordre $8-i$, est représenté par un polynôme homogène, de degré $8-i$, à 3 variables, d, P, p, dont les coefficients dépendent du second complexe seulement, et dans lequel on remplace chaque expression de la forme $d^j\mathrm{P}^k p^{8-i-j-k}$ par le nombre des coniques du premier complexe qui rencontrent j droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $8-i-j-k$ points.*

Si, dans cet énoncé, on suppose i égal à 7, le premier complexe est un *système*, et le théorème ne diffère pas de celui qui a été démontré au chapitre I de cette 3me partie.

Pour démontrer d'un seul coup ce théorème dans toute sa généralité, nous allons supposer qu'il soit vrai pour une valeur de i, et en conclure son exactitude pour la valeur immédiatement inférieure.

L'hypothèse consiste donc en ce que le nombre des coniques, communes à un complexe (C_{i+1}) d'ordre $i+1$ et à un complexe d'ordre $7-i$, (C_{7-i}), est représenté par une forme ternaire, en d, P, p, de degré $7-i$, dont les coefficients dépendent seulement du complexe (C_{7-i}). Nous désignerons par m_{7-i} cette forme ternaire, que nous appellerons le *module* du complexe (C_{7-i}).

Soit maintenant un complexe d'ordre i, (C_i). Les coniques de ce complexe, qui rencontrent une droite, forment un complexe (E) d'ordre $i+1$. Le nombre des coniques de (E) qui rencontrent j droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $7-j-k-i$ points n'est autre que celui des coniques C_i qui rencontrent $j+1$ droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $7-j-k-i$ points, ce que nous représentons symboliquement par $(d^{j+1}\mathrm{P}^k p^{7-j-k-i})$. Par suite, le nombre des coniques communes à (E) et à (C_{7-i}) est, d'après l'hypothèse, représenté symboliquement par le produit dm_{7-i}, où l'on doit remplacer chaque expression $(d^j P^k p^{8-j-k-i})$ par le nombre des coniques C_i, qui rencontrent j droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $8-j-k-i$ points.

De la même façon, le nombre des coniques communes à (C_i), (C_{7-i}), qui touchent un plan est représenté par le produit Pm_{7-i}; et celui de ces coniques dont les plans passent par un point est représenté par pm_{7-i}. Donc les 3 caractéristiques μ, ν, ρ du système des coniques communes à (C_i) et à (C_{7-i}) sont respectivement : dm_{7-i}, Pm_{7-i}, pm_{7-i}. Par suite, d'après le théorème relatif aux systèmes de coniques, le nombre des coniques communes à ce système et à un complexe (C_1) d'ordre 1, est : $(\alpha d+\beta P+\gamma p)m_{7-i}$, les nombres α, β, γ ne dépendant que du complexe (C_1). Or cette expression est une forme de degré $8-i$ en d, P, p, et elle exprime le nombre des coniques communes au complexe (C_i) et au complexe d'ordre $8-i$, *intersection complète* des deux complexes (C_1) et (C_{7-i}). Donc, en premier lieu, *si le théorème est exact pour une valeur de i, il l'est aussi pour la valeur immédiatement inférieure, quand le second complexe est l'intersection complète d'un complexe du 1^er^ ordre et d'un autre complexe.*

Examinons maintenant le cas où le second complexe ne satisfait pas à cette dernière condition. Soit donc (C_{8-i}) un complexe quelconque d'ordre $8-i$, dont nous cherchons le nombre des intersections avec (C_i). Prenons une surface du 2^me^ ordre fixe Σ, et considérons les couples de coniques C_i et C_{8-i}, qui se coupent en 4 points sur Σ. On voit immédiatement que ces couples de coniques forment deux systèmes, tels que, par les points d'intersection des coniques de l'un d'eux avec Σ, passe *une* conique *correspondante* de l'autre système.

Les coniques qui coupent Σ en 4 points appartenant à une conique du complexe (C_{8-i}) forment un complexe (C'_{7-i}) d'ordre $7-i$; et l'un des systèmes (S) est celui des coniques communes à (C_i) et à (C'_{7-i}). De même, les coniques qui coupent Σ en 4 points appartenant à une conique du complexe (C_i) forment un complexe (C'_{i-1}) d'ordre $i-1$; et l'autre système (S') est celui qui est commun à (C_{8-i}) et à (C'_{i-1}).

Soit O un point de Σ, et L, L' les droites de la surface qui passent en O. Il n'y a pas de couple de coniques correspondantes des deux systèmes (S) et (S') qui se coupent à la fois sur L et sur L'. Par conséquent, les seules coniques de l'un ou l'autre de ces systèmes, qui rencontrent à la fois ces deux droites, sont tout entières sur Σ. Cherchons-en le nombre.

Pour qu'une conique d'un complexe (C_n) soit sur une surface du 2^me^ ordre donnée arbitrairement, il faut que l'ordre n de ce complexe soit non supérieur à 3, puisque la condition, pour une conique, d'être située sur une surface du 2^me^ ordre donnée, est une condition quintuple. Le nombre n étant supposé non supérieur à 3, les coniques C_n qui sont sur Σ contiennent $3-n$ arbitraires; et il en est de même de leurs plans.

Dans le cas actuel, on voit qu'il ne peut exister sur Σ que des coniques d'un seul des deux complexes (C_i), (C_{8-i}). Car un seul des deux nombres i, $8-i$ est inférieur à 4. Si i est égal à 4, il n'existe sur Σ des coniques d'aucun des deux complexes. Examinons les cas où i est un des nombres 5, 6, 7.

Si i est égal à 5, les plans des coniques C_i sont arbitraires; et, dans un plan donné, il y a un nombre fini de ces coniques. Un plan donné est celui qui passe par 3 points; par suite, ce nombre est représenté par le symbole (p^3). D'autre part, il y a un nombre fini c de coniques du complexe C_{8-i}, dont l'ordre est ici égal à 3, situées sur Σ. Chacune de ces coniques appartient au système S', et correspond aux (p^3) coniques C_i situées dans son plan. Il y a donc cp^3 couples de coniques correspondantes, tel que, dans chaque couple, la conique du système S' rencontre les deux droites L et L'.

Si i est égal à 6, les plans des coniques du complexe (C_i) enveloppent une surface, dont la classe est représentée par le symbole (p^2). D'autre part, les plans des coniques C_{8-i}, qui sont sur Σ, enveloppent une développable, dont soit c' la classe. Il y a $c'p^2$ coniques de S' rencontrant les droites L et L'. Le cas où i est égal à 7 a déjà été examiné plus haut (ch. I).

Ainsi, quand i est au moins égal à 4, le nombre des coniques S' rencontrant les droites L et L' est de la forme cp^{8-i}, c étant un nombre qui ne dépend que du complexe (C_{8-i}). Le cas où $i=4$ n'est pas excepté; car le symbole (p^4) est nul.

Faisons maintenant la perspective plane des deux systèmes S et S', en plaçant l'œil en O. Nous obtenons, sur le tableau, deux systèmes S_1, S'_1 de coniques qui se correspondent une à une, de telle sorte que deux coniques correspondantes, perspectives de deux coniques correspondantes de l'espace, déterminent une involution avec les traces des droites L et L' sur la droite qui joint ces deux traces, l, l'. Il y a de plus cp^{8-i} couples de coniques correspondantes des deux systèmes S_1, S'_1, tels que, dans chaque couple, la conique de S'_1 passe aux points l et l'.

On déduit de là, comme on l'a fait plus haut, que le nombre des coniques communes aux deux systèmes S_1, S'_1 est égal à la 1re caractéristique du système S_1, augmentée de cp^{8-i}, moins la valeur totale des droites-coniques communes aux deux systèmes, laquelle est la même dans chacun de ces systèmes. Si ρ est la 3me caractéristique du système S, 2ρ est la valeur totale des droites-coniques communes aux deux systèmes, et perspectives de coniques propres. Par suite, en appelant μ la 1re caractéristique du même système, et ω la valeur totale des droites-coniques, communes aux deux systèmes et perspectives de droites-coniques, le nombre cherché est égal à $\mu+cp^{8-i}-2\rho-\omega$.

Supposons maintenant que le complexe (C_{8-i}) ne contienne pas de droites-coniques au-dessus de la 1re espèce : cela signifie que chacune de ces droites-coniques, avec son plan, contient au plus $5-(8-i)$ arbitraires, ou, en d'autres termes, que l'ensemble de cette droite et de son plan satisfait au moins à $8-i$ conditions. D'autre part, le plus grand nombre d'arbitraires que la même figure contient dans le complexe (C_i) est $7-i$. Donc, si les deux complexes n'ont aucune liaison, il n'y a pas de droites-coniques communes aux deux complexes dont les plans coïncident. Par suite, il n'y a pas dans le système (S) de droites-coniques ayant pour correspondante une droite-conique de (C_{8-i}). Donc, dans l'hypothèse où l'on s'est placé, le nombre ω est nul. Le nombre des coniques communes à (C_i) et (C_{8-i}) est alors simplement égal à : $\mu+cp^{8-i}-2\rho$. Or μ et ρ sont deux caractéristiques du système commun à (C_i) et à (C'_{7-i}). Elles sont donc égales à dm'_{7-i} et pm'_{7-i}, m'_{7-i} étant le *module* du complexe (C'_{7-i}). Les coefficiens de ce module ne dépendent que du complexe (C_{8-i}). Par suite, le nombre des coniques communes à (C_i) et (C_{8-i}) est exprimé par la formule : $(d-2p)m'_{7-i}+cp^{8-i}$, qui vérifie le théorème. Donc, *si le théorème est exact pour une valeur de i, au moins égale à 5, il l'est aussi pour la valeur immédiatement inférieure, quand le second complexe ne contient pas de droites-coniques d'espèce supérieure à la première.*

Si le complexe (C_{8-i}) contient des droites-coniques d'espèce supérieure à la 1re, on sait, d'après le théorème I, page 19 de cette 3me partie, qu'on peut y joindre un complexe (D, K'_1) intersection complète de deux complexes dont l'un (K'_1) est du 1er ordre, de telle sorte que l'ensemble (C_{8-i}) et (D, K'_1) soit décomposable en une intersection complète (B, K_1) et un complexe (C'_{8-i}) ne contenant pas de droites-coniques d'espèce supérieure à la première. En désignant par N(A, B, ...) le nombre des coniques communes aux complexes (A), (B), ..., on déduit de la relation :

$$(C_{8-i})+(D,K'_1)=(C'_{8-i})+(B,K_1),$$

la suivante :

$$N(C_i, C_{8-i})+N(C_i, D, K'_1)=N(C_i, C'_{8-i})+N(C_i, B, K_1).$$

D'après les deux théorèmes précédents, les 3 derniers nombres sont exprimés par des formes de degré $8-i$ en d, p, P, dont les coefficients ne dépendent pas de (C_i). Il en est donc de même du premier de ces nombres. Donc le théorème est démontré pour toutes les valeurs de i au moins égales à 4.

Il est bien facile de l'étendre aux autres valeurs de i. Il suffit pour cela de déduire de la relation : $N(C_i, C_{8-i})=m_{8-i}$, où i est au moins égal à 4, l'expression du même nombre $N(C_i, C_{8-i})$ en fonction des symboles $(d^j P^k p^{i-j-k})$, qui expriment le nombre des coniques de (C_{8-i}), qui rencontrent j droites, touchent k plans, et dont les plans passent par $i-j-k$ points.

Remplaçons, à cet effet, (C_{8-i}) par le complexe $[j dr, kp, (i-j-k)pl]$, dans la relation : $N(C_i, C_{8-i}) = m_{8-i}$. On en conclura

$$N\left[C_{8-i}, j dr, kp, (i-j-k)pl\right] = d^j P^k p^{i-j-k} m_{8-i},$$

ou

$$(d^j P^k p^{i-j-k}) = d^j P^k p^{i-j-k} m_{8-i},$$

relation dans le second membre de laquelle chaque symbole $d^{j'} P^{k'} p^{8-i'-k}$ représente le nombre des coniques qui rencontrent j' droites, touchent k' plans, et dont les plans passent par $8-i'-k'$ points. On pourra former autant de relations analogues qu'il y a de manières de choisir les nombres j, k. Comme $i-j-k$ ne peut être supérieur à 3, on peut choisir ces nombres de toutes les manières qui rendent $j+k$ au moins égal à $i-3$ et au plus égal à i, c'est-à-dire de $4i-2$ manières. D'autre part, le module m_{8-i} contient $\frac{(9-i)(10-i)}{2}$ termes, si i est 7, 6 ou 5, et un de moins, si i est égal à 4. On reconnaît sans peine que ce nombre des termes de m_{8-i} est inférieur à $4i-2$, excepté dans le cas où i est égal à 4 : ces deux nombres sont alors égaux. Des $4i-2$ équations, on peut tirer les valeurs des coefficients de m_{8-i} exprimés en fonction linéaire et homogène des symboles $(d^j P^k p^{i-j-k})$. Si, dans la relation $N(C_i, C_{8-i}) = m_{8-i}$, on regarde les symboles $(d^j P^k p^{8-i-j-k})$ comme des coefficients donnés, définissant le complexe (C_i), et qu'on remplace les coefficients de m_{8-i} par les valeurs tirées des $4i-2$ équations, on aura le nombre $N(C_i, C_{8-i})$ exprimé par une fonction linéaire et homogène des symboles $(d^j P^k p^{i-j-k})$, dont les coefficients ne dépendent pas de (C_{8-i}). Donc le théorème est général.

Dès que i surpasse 5, le nombre des équations par lesquelles on détermine les coefficients de m_{8-i} surpasse celui des inconnues. On en conclut, comme pour le cas des coniques dans le plan (2[me] partie, p. 236), que les nombres $(d^j P^k p^{i-j-k})$ relatifs à un complexe d'ordre $8-i$ quelconque satisfont à certaines relations, grâce auxquelles le module d'un complexe d'ordre i peut être réduit à un nombre de termes inférieur à celui qui est indiqué par son degré i. Mais la même propriété subsiste encore pour des valeurs de i inférieures à 5, ainsi que je vais le montrer.

On a trouvé plus haut que, si i est au moins égal à 4, le nombre des coniques communes à (C_i) et (C_{8-i}) est représenté par $(d-2p)m'_{7-i} + cp^{8-i}$, si (C_{8-i}) ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la 1[re] espèce. On voit donc que, dans ce cas, le module de (C_{8-i}), qui est précisément égal à cette expression, ne contient pas la puissance $(8-i)^{\text{ième}}$ de P. Mais m'_{7-i} est le module du complexe (C'_{7-i}) qui ne contient pas non plus de droites-coniques au-dessus de la 1[re] espèce. Donc la puissance $(7-i)^{\text{ième}}$ de P manque aussi. En raisonnant de même sur (C'_{7-i}), on arrive à cette conclusion : *Le module d'un complexe, d'ordre non supérieur à 4, qui ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la 1re espèce, ne comprend pas de terme en* P.

Toujours dans l'hypothèse $i > 4$, on peut supposer que le complexe (C_i) est un complexe plan. Tous les symboles $(d^j P^k p^{8-i-j-k})$ qui y sont relatifs s'évanouissent si l'exposant de p n'y est pas nul. Par conséquent, les coefficients d'un module m_{8-i}, qui affectent les termes ne contenant pas (p), sont les mêmes que leurs analogues dans le module d'un complexe plan satisfaisant aux conditions qui définissent le complexe (C_{8-i}). Il en résulte, en premier lieu, que si $8-i$ est égal à 2, et que le complexe (C_2) ne contient pas de droites-coniques de 3me espèce, le module m_2 ne contient pas le terme en P^2, attendu que la propriété analogue a été démontrée plus haut (2me partie, p. 235) pour un complexe plan du 2me ordre. Le même résultat peut d'ailleurs être démontré au moyen de la relation

$$(C_{8-i}) + (D, K'_1) = (C'_{8-i}) + (B, K_1),$$

qui s'applique également aux modules des complexes entrant dans cette relation. Les complexes (C'_{8-i}) et (D) ne contiennent pas de droites-coniques au-dessus de la 1re espèce. Par conséquent, la relation ci-dessus, appliquée aux modules, montre que les termes en P, dans le module de (C_{8-i}) sont : 1° des termes du 1er degré venant du module de (K'_1) ; 2° ceux qui proviennent du produit des modules de (B) et de (K_1). Si (B) ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la 1re espèce, ces derniers termes se réduisent au 1er degré. Ce fait se produit si (C_{8-i}) ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la 2me espèce. On peut donc dire que : *Si un complexe d'ordre non supérieur à 4 ne contient pas de droites-coniques au-dessus de la 2me espèce, son module ne contient pas* P *au-dessus du 1er degré*. Et, en appliquant, dans le cas général, ce résultat au complexe (B), on peut dire que : *Le module de tout complexe d'ordre non supérieur à 4 ne contient pas* P *au-dessus du 2me degré.*

Prenons $i = 5$; le module de (C_{8-i}) ou (C_3) ne contient pas le terme en P^3. Il en est donc de même du module du complexe des coniques touchant 3 plans. Par suite, *le nombre des coniques d'un complexe du 5me ordre quelconque qui touchent 3 plans est lié, par une relation indépendante de ce complexe, aux autres nombres caractéristiques du même complexe.*

De même, si on fait $i = 4$, on conclut encore que *les nombres* (P^4), $(P^3 d)$, $(P^3 p)$, *relatifs à un complexe du 4me ordre quelconque, sont liés par 3 relations indépendantes de ce complexe aux autres nombres caractéristiques du même complexe.*

Toutes ces relations sont linéaires et homogènes. Soit $U = 0$ l'une d'elles ; il est clair qu'on peut prendre pour module de (C_{8-i}) son module, qui ne contient pas P au-dessus du 2me degré, augmenté d'un terme tel que λU,

λ étant une constante arbitraire. On peut donc modifier les énoncés ci-dessus, en disant que *les modules des complexes d'ordre 3 et 4 contiennent les premiers* UNE, *les seconds* TROIS *constantes arbitraires, dont on peut disposer de manière à annuler* UN *ou* TROIS *coefficients.*

Il serait facile de former les relations telles que $U = 0$, soit directement, soit par la considération des complexes plans, grâce à laquelle on peut aussi obtenir une nouvelle démonstration de la même proposition. Je ne m'y arrêterai pas.

Au sujet des modules des complexes d'ordre supérieur à 4, la méthode employée pour les former montre que le nombre de leurs coefficients peut être réduit au même nombre que celui des coefficients d'un module de degré complémentaire à 8.

En suivant exactement la méthode employée dans la 2^me^ partie, p. 236, on démontrera facilement le théorème suivant, qui complète la théorie actuelle :

THÉORÈME III. — *Le module de l'intersection complète de deux complexes est égal au produit des modules de ces complexes; et, en particulier, le nombre des coniques communes à plusieurs complexes dont la somme des ordres est égale à 8, est représenté par le produit des modules de ces complexes, où l'on doit remplacer chaque terme tel que* $d^j P^k p^{8-j-k}$ *par le nombre des coniques qui rencontrent j droites, touchent k plans, et dont les plans passent par* $(8 - j - k)$ *points.*

Je terminerai ce chapitre en citant quelques exemples des théorèmes qu'il renferme. J'en emprunterai les éléments au mémoire de M. Chasles dont il a été déjà question au début de cette 2^me^ partie.

Outre les conditions simples de rencontrer des droites, toucher des plans, et que les plans des coniques passent par des points donnés, M. Chasles a considéré les conditions multiples suivantes, en regard de chacune desquelles j'écris son module :

Condition double... O_2 de passer par un point donné : $m_2 = p(d - 2p)$

Condition triple.... T_3 de toucher un plan en un point donné............ : $m_3 = \frac{1}{2} pP(d - 2p)$

Id........... A_3 de toucher une droite..... : $m'_3 = p^2(P - 2p)$

Condition quadruple A_4 de toucher une droite en un point donné............ : $m_4 = \frac{1}{2} p^2 (P - 2p)(d - 2p)$.

On peut vérifier que les caractéristiques des différents systèmes considérés par M. Chasles, et formés avec ces conditions, concordent avec celles qu'on obtiendrait en les calculant au moyen de ces modules. Par exemple, les caractéristiques du système $(5P, O_2)$ sont, d'après M. Chasles, 8, 4, 6.

D'après les théorèmes ci-dessus, elles sont aussi dP^5m_2, P^6m^2, et pP^5m_2; c'est-à-dire

$$\begin{aligned} dP^5m_2 &= d^2P^5p - 2dP^5p^2, \\ P^6m_2 &= d\,P^6p - 2P^6p^2, \\ pP^5m^2 &= d\,P^5p - 2P^5p^3. \end{aligned}$$

Or, d'après les valeurs des caractéristiques des systèmes définis par les seules conditions de rencontrer des droites, toucher des plans, ou que les plans des coniques passent par des points, valeurs prises dans le mémoire de M. Chasles, on a

$$d^2P^5p = 24,\quad dP^5p^2 = 8,\quad dP^6p = 12,\quad P^6p^2 = 4,\quad dP^5p^2 = 8,\quad P^5p^3 = 1.$$

D'où l'on conclut $dP^5m_2 = 8$, $P^6m_2 = 4$, $pP^5m_2 = 6$, conformément au ré-résultat de M. Chasles.

On peut faire d'autres vérifications analogues sur la même condition O_2, en considérant les systèmes ($1dr$, $4P$, O_2), ($1p$, $4P$, O_2), ... ; et de même sur les autres conditions.

M. Chasles a considéré des combinaisons diverses de ces conditions :

1° Condition triple de passer par un point donné et de rencontrer en un second point une droite donnée menée par le point donné. Il est clair que ceci revient à la simultanéité de la condition O_2 et de la condition ($1p$). Le module est donc égal à pm_2.

2° Condition quadruple de passer par 2 points donnés. Le module est $m_2^2 = (dp - 2p^2)^2 = dp^2(d - 4p)$. La réduction provient de la suppression du terme $4p^4$, qui peut être considéré comme nul.

3° Condition quadruple de toucher un plan en un point donné, et de rencontrer une seconde fois une droite donnée passant par le point donné. Ceci revient à la simultanéité des conditions T_3 et ($1p$). Le module est donc : pm_3; etc.

IV. — DÉTERMINATION DU NOMBRE DES SURFACES DU 2^{me} ORDRE QUI SATISFONT A DES CONDITIONS DONNÉES.

Quand on cherche les coniques propres d'un système qui satisfont à une condition donnée, on est obligé de mettre à part, pour retrancher leur valeur du nombre total, les coniques du système qui sont réduites à une droite Cette obligation s'impose toutes les fois que la condition donnée est telle qu'elle soit satisfaite par une droite quelconque, considérée comme une conique aplatie. Il n'y a pas lieu de tenir, de même, compte des coniques réduites à un point (ou à deux droites) : la condition pour une conique de se réduire à deux droites est, en effet, une condition simple. Il en résulte qu'une condition qui serait satisfaite par toute conique réduite à deux droites se décomposerait en une condition ne jouissant pas de cette propriété, et la condition de réduction à deux droites.

En général, si, dans un système de courbes, on veut trouver le nombre des courbes propres satisfaisant à une condition, il faudra mettre à part toutes les courbes composées, quand la possibilité de leur décomposition exige plus d'une condition eu égard à la forme générale des courbes du système. La même remarque s'applique aux systèmes de surfaces : ainsi, dans un système de surfaces du 2^{me} ordre, il faut mettre à part les surfaces réduites à un plan, et les surfaces réduites à une droite (ou à deux plans). Un plan, qui compte comme une surface du 2^{me} ordre dans un système, sera appelé *plan-quadratique;* une droite, qui compte de même pour une surface du 2^{me} ordre dans un système, sera appelée *droite-quadratique.* J'appelle aussi *point-conique,* dans un système de coniques, un point auquel se réduit une conique du système.

Soit (A) un système de surfaces A du 2^{me} ordre. Les sections des surfaces A par un plan fixe P forment un système (a) de coniques a. L'indicatrice du système (a), relative à une droite Δ du plan P, est *l'indicatrice* du système (A), relative à cette droite. Soit μ le nombre des surfaces A qui passent par un point, ν le nombre des surfaces A qui touchent une droite. Ces nombres sont les caractéristiques du système (a). Les droites-coniques de (a) sont les intersections de P et des plans-quadratiques de (A). Soit ω la valeur totale de ces droites-coniques ; on aura la relation : $2\mu - \nu = \omega$. Le nombre ω est la *valeur totale des plans-quadratiques du système* (A).

Dans un système plan de coniques, (a), on a une relation corrélative de cette dernière. Ce sera : $2\nu - \mu = \varphi$, le nombre φ désignant la *valeur totale des points-coniques* du système. La valeur d'un point-conique se trouvera en transformant corrélativement la proposition de la 1^{re} partie (page 137) ; c'est-à-dire que, *pour trouver la valeur d'un point-conique, il suffit de chercher les coniques d'axes infiniment petits, dont les tangentes issues d'un point arbitraire divisent harmoniquement un angle ayant son sommet en ce point, et dont un côté est à distance infiniment petite du premier ordre du point-conique, et de faire la somme des ordres des carrés des angles de ces tangentes.*

Dans le système (a), dérivé du système (A), les points-coniques proviennent des droites-quadratiques de (A) et des surfaces A tangentes à P. Soit χ la valeur totale des premières, et ρ celle des secondes ; on aura : $\rho + \chi = 2\nu - \mu$. Cherchons pour combien d'unités chaque point-conique de (a), provenant d'une surface A, tangente à P, figure dans le nombre ρ.

Soit donc A une surface tangente à P au point a, et A′ une surface du système, infiniment peu différente de A. Prenons pour infiniment petit du 1^{er} ordre la distance des centres de A et de A′. Le plan P fait un angle du 1^{er} ordre avec un plan tangent à A′ en un point infiniment voisin de a. Par suite, les tangentes, menées d'un point arbitraire O du plan P à la section

a' de A' par P, font entre elles un angle de l'ordre $\frac{1}{2}$. La conjuguée harmonique L' d'une droite arbitraire L, menée par O, par rapport à ces tangentes, est à une distance du centre de a' de l'ordre du carré de l'angle de ces tangentes, c'est-à-dire du 1er ordre. D'ailleurs a et le centre de a' sont à une distance du 1er ordre. Donc L' est à une distance du 1er ordre de a. Donc, d'après la proposition ci-dessus, chaque conique a' entre pour une unité dans la valeur du point-conique a. Il reste à trouver le nombre des coniques a'. En supposant le point O et la droite L à l'infini, les coniques a' sont assujetties à avoir leurs centres sur une droite donnée, située à distance infiniment petite du 1er ordre de a. Or il n'y a qu'une telle conique du système (a) qui soit infiniment peu différente du point-conique a. Donc la valeur du point-conique a est l'unité. Donc *le nombre ρ marque précisément le nombre des surfaces* A *tangentes à un plan.* C'est la 3^{me} caractéristique du système (A). Le nombre χ est *la valeur totale des droites-quadratiques* du système.

Cherchons maintenant le nombre des surfaces A qui satisfont à une condition donnée. Soit Σ une surface fixe du 2^{me} ordre. Par la biquadratique d'intersection de Σ et de chaque surface A, menons les surfaces, au nombre de m, qui satisfont à la condition donnée. Elles forment un second système (A_1), dont chaque surface correspond à une surface A. Les systèmes de coniques, (a) et (a_1), déterminés par les intersections d'un plan P avec les surfaces des systèmes (A) et (A_1), se correspondent de telle manière que deux coniques correspondantes, a et a_1, se coupent entièrement sur une conique fixe. Soit $m-n$ le nombre des surfaces ordinaires, satisfaisant à la condition donnée, qui passent par une biquadratique qui diffère infiniment peu d'une conique : à chaque droite-conique du système (a) correspondent n droites-coniques du système (a_1). On en conclut par un raisonnement répété déjà plusieurs fois que le nombre des coniques communes aux deux systèmes est $m\mu - n\omega$. Mais, parmi ces coniques, se trouvent des points-coniques, provenant des droites-quadratiques communes aux deux systèmes (A) et (A_1). Pour trouver le nombre des coniques absorbées par ces points-coniques, nous allons déterminer le nombre des couples de points correspondants des indicatrices de (a) et de (a_1) qui sont confondus en un point représentatif d'un de ces points-coniques

Relativement à une droite-quadratique, la conjuguée d'une droite quelconque est la droite-quadratique elle même. Par suite, relativement à une surface infiniment peu différente, les conjuguées de toutes les droites sont infiniment peu différentes entre elles. Parmi ces conjuguées, se trouve un axe de la surface. Si, par cet axe X, on mène un plan arbitraire, la polaire d'un point quelconque de ce plan, relativement à la conique d'intersection, est infiniment peu différente de X. Cette conique est donc infiniment aplatie. Soit ε le rapport infiniment petit des axes de cette conique. On voit facilement que la conjuguée d'une droite quelconque, relativement à la surface considérée S, diffère de l'axe X d'un infiniment petit de l'ordre de ε^2. De même aussi la section, faite dans S par un plan arbitraire, est une conique dont chaque point, à distance finie de X, est à une distance de l'asymptote voisine de l'ordre de ε^2.

Prenons sur S une biquadratique résultant de son intersection avec une surface du 2^{me} ordre arbitraire, Σ. Par cette biquadratique, nous menons les m surfaces qui satisfont à une condition donnée. Soit S_1 une de ces surfaces. Les sections faites dans S et S_1 par un plan contenant X sont des coniques c, c_1, se coupant en 4 points sur la biquadratique, et la conique c est infiniment aplatie. Si, par la nature de la condition considérée, il y a t coniques c_1 qui sont aussi infiniment aplaties, chacune de ces t coniques a un axe de l'ordre de ε, et la polaire d'un point de son plan, relativement à cette conique, diffère de la polaire du même point, relativement à c, d'un infiniment petit de l'ordre de ε^2. Il y a alors t surfaces S_1 infiniment peu différentes d'une droite-quadratique. Soit S_1 une de ces surfaces. La section faite dans S_1 par un plan arbitraire est une conique dont le centre diffère de celui de la section faite dans S par le même plan d'un infiniment petit de l'ordre de ε^2, et qui, en ses points à distance finie de X, est à une distance de l'ordre de ε^2 de ses asymptotes.

Mais les deux sections ont 4 points communs à distance finie de X. Donc chaque asymptote de l'une est à une distance d'une asymptote de l'autre infiniment petite de l'ordre de ε^2. Donc enfin les deux points où une droite Δ, à distance finie de X, rencontre S sont respectivement à distance infiniment petite de l'ordre de ε^2 des deux points où cette droite rencontre S_1. Il en est de même des milieux de ces deux couples de points. La distance de ces points milieux est la différence des abscisses des points des indicatrices des deux systèmes (A) et (A_1), relatives à la droite Δ, qui répondent aux surfaces S et S_1. Donc, si le point de l'indicatrice de (A), répondant à S, est à une distance du 1er ordre du point de cette indicatrice, répondant à la droite-quadratique infiniment voisine de S, l'ordre de ε^2 marque le nombre des couples de points correspondants confondus sur les deux indicatrices, absorbés par le couple de surfaces S et S_1 ; et chaque surface S fait disparaître t fois ce nombre de surfaces communes aux deux systèmes.

Or il est bien aisé de voir, d'après l'expression donnée plus haut de la valeur d'un point-conique d'un système de coniques, que, si l'on prend, sur l'indicatrice de (A), un point à distance infiniment petite du 1er ordre du point correspondant à une droite-quadratique, et que ε soit le rapport infiniment petit des axes d'une section faite dans la surface correspondante par un plan mené par l'axe de cette surface, l'ordre de ε^2 est le nombre pour lequel cette surface figure dans la valeur totale de cette droite-quadratique. Par suite, la somme des ordres des quantités telles que ι^2 est la valeur totale de cette droite-quadratique. Donc enfin le nombre des surfaces correspondantes des systèmes (A) et (A_1) confondues, qui sont absorbées par une droite-quadratique, est égal à t fois la valeur de cette droite-quadratique. Donc le nombre des surfaces A qui satisfont à la condition donnée est :

$$N = m\mu - \nu\omega - t\chi = (m - 2n - t)\,\mu + (n - 2t)\,\nu + t\rho = \alpha\mu + \beta\nu + \gamma\rho.$$

Ainsi se trouve démontré un important théorème, dû à M. Chasles, mais qui n'avait pas encore reçu de démonstration. Son énoncé sera compris dans celui d'un théorème plus général, dont je vais actuellement m'occuper.

Je nomme *complexe du n^{me} ordre* de surfaces du 2^{me} ordre l'ensemble de ces surfaces qui satisfont à n conditions. L'ensemble des surfaces communes à deux complexes d'ordre n et n', ou *intersection complète* de ces complexes, est un complexe d'ordre $n + n'$, si ce nombre est inférieur à 8; un système, si ce nombre est égal à 8; un nombre fini de surfaces, si $n + n'$ est égal à 9. Cette intersection complète peut être décomposable en plusieurs complexes d'ordre $n + n'$, ou en plusieurs systèmes, ou en plusieurs groupes distincts de surfaces.

Une surface du 2^{me} ordre peut être définie par les points où elle rencontre 5 droites données D_1, D_2, ..., D_5. Si les 8 points d'intersection avec les 4 premières sont donnés, les 2 points d'intersection avec la 5^{me} font partie d'une involution, en sorte que ces deux points sont déterminés d'une seule manière par une coordonnée, qui sera, si l'on veut, la distance δ de leur milieu à une origine prise sur D_5.

Si la surface considérée fait partie d'un complexe (A) d'ordre $i > 2$, par chaque système de 8 points situés sur les 4 premières droites et sur une surface A, il ne passe pas, en général, d'autre surface du complexe. En sorte que δ est déterminé d'une seule manière par les 8 points. Il existe donc, pour le complexe (A), une relation telle que $v\delta - u = 0$, où v et u ne contiennent que les coordonnées des points situés sur les 4 premières droites. Cette relation définit un complexe (K_1) du 1er ordre.

Les surfaces du 2^{me} ordre, passant par chaque système de 8 points où chaque surface A rencontre les 4 premières droites, forment un complexe (B) d'ordre $i - 1$. On voit facilement que les complexes (B) et le complexe défini par les relations $v = 0$, $u = 0$, ont en commun un complexe d'ordre i, (A'), défini par des relations où n'entrent que des points des 4 premières droites. Ce complexe (A'), joint au complexe (A), constitue l'intersection complète de (B) et de (K_1). Pour s'en convaincre, il n'y a qu'à raisonner exactement comme on l'a fait plus haut (3^{me} partie, p. 18). Cette propriété s'exprime par la relation : $(A) + (A') = (B, K_1)$.

On trouvera de même un complexe (A''), défini par des relations entre 7 points seulement, et tel qu'en le joignant au complexe (A'), on obtiendra l'intersection de deux complexes (B'), (K'_1), ce dernier du 1er ordre. Cette propriété s'exprimera par la relation : $(A')+(A'')=(B',K'_1)$. On aura de même : $A''+A'''=(B'',K''_1)$, ..., le complexe (A''') étant défini par des relations entre 6 points. Comme les complexes A, A', ... sont tous d'ordre i, l'opération s'arrêtera lorsqu'on obtiendra un complexe défini par des relations entre i points. Ce dernier complexe est donc (A^{9-i}). Il est formé par les surfaces qui passent en i points donnés, ou plutôt il est composé d'un certain nombre de tels complexes. On aura donc finalement :

$$(A)=\pm(A^{9-i})+(B,K_1)-(B',K'_1)+(B'',K''_1)\ldots.$$

Cette relation montre que l'on pourra trouver le nombre des surfaces communes à (A) et à un complexe donné d'ordre $9-i$, si l'on sait le faire pour le complexe (A^{9-i}) et les complexes (B, K_1), (B', K'_1), etc.

Cela posé, nous allons démontrer que :

Théorème. — *Le nombre des surfaces du 2me ordre d'un complexe d'ordre i, qui appartiennent en même temps à un autre complexe d'ordre $9-i$, est représenté par un polynôme homogène, de degré $9-i$ à 3 variables, p, d, P, dont les coefficients dépendent du second complexe seulement, et dans lequel on remplace chaque expression de la forme $p^j d^k P^{9-j-k-i}$ par le nombre des surfaces du 2me ordre du premier complexe, qui passent en j points, touchent k droites et $9-j-k-i$ plans.*

Si, dans cet énoncé, on fait $i=8$, on a le théorème sur les systèmes, démontré plus haut.

L'exactitude de ce théorème est évidente si le complexe d'ordre $9-i$ se compose des surfaces qui passent en $9-i$ points. Le polynôme de degré $9-i$ se réduit à p^{9-i}.

Admettons l'exactitude du théorème pour une valeur de i. Le nombre des surfaces communes à un complexe d'ordre i et à un complexe (C_{9-i}), d'ordre $9-i$, est représenté par un polynôme de degré $9-i$, ou *module* du complexe (C_{9-i}). Soit m_{9-i} ce module. Considérons un complexe d'ordre $i-1$, (C_{i-1}). Les complexes (C_{9-i}) et (C_{i-1}) ont en commun un système, dont on reconnaît facilement que les caractéristiques sont : pm_{9-i}, dm_{9-i}, Pm_{9-i}. Par suite, d'après le théorème sur les systèmes, le nombre des surfaces de ce système, qui appartiennent à un complexe du 1er ordre (K_1), est de la forme : $(\alpha p+\beta d+\gamma P)m_{9-i}$, qui est un polynôme homogène de degré $10-i$. Donc, si le théorème est vrai pour une valeur de i, il l'est aussi pour la valeur immédiatement inférieure, quand le second complexe est l'intersection complète d'un complexe du 1er ordre et d'un autre complexe.

Or un complexe quelconque a été réduit à une suite de complexes du même ordre, satisfaisant à cette dernière condition, et à un complexe de surfaces passant en des points fixes. Donc, dans le cas général, si le théorème est exact pour une valeur de i, il l'est aussi pour la valeur immédiatement inférieure. Or il est vrai pour $i=8$; donc il est entièrement démontré.

A peine est-il besoin d'ajouter que, de même que pour les complexes de coniques, les modules des complexes d'ordre supérieur à 4 peuvent être réduits au même nombre de termes que ceux des complexes d'ordre complémentaire à 9.

En suivant la méthode employée plus haut. on démontrera facilement que :

THÉORÈME IV. — *Le module de l'intersection complète de deux complexes est égal au produit des modules de ces complexes ;* et, en particulier, *le nombre des surfaces du* 2^{me} *ordre communes à plusieurs complexes, dont la somme des ordres est égale à* 9, *est représenté par le produit des modules de ces complexes, où l'on remplace chaque terme tel que* $p^j d^k P^{9-j-k}$ *par le nombre des surfaces du* 2^{me} *ordre qui passent en* j *points. et touchent* k *droites et* 9 — j — k *plans.*

On peut facilement obtenir des vérifications de cette théorie au moyen des caractéristiques des systèmes de surfaces du 2^{me} ordre considérés par M. Chasles (*Comptes rendus*, t. LXII, p. 405). Dans une étude ultérieure, j'aurai occasion de revenir sur les applications des principes posés dans le travail actuel, et de donner à ce sujet les développements convenables.

Il me sera permis, en terminant ce mémoire, de faire une remarque sur les complexes de surface du 2^{me} ordre. De telles surfaces, étant considérées comme éléments de l'espace, donnent lieu à des complexes de différents ordres, comme les points donnent lieu à des lignes et à des surfaces. Le nombre des intersections de trois surfaces ou d'une ligne et d'une surface est le produit des degrés ; il en est de même du degré de la ligne d'intersection de deux surfaces.

De même, dans les complexes considérés, le nombre des intersections est figuré par le produit des modules des complexes, ou bien le module d'un complexe intersection de deux autres est le produit des modules de ces derniers. Et il faut bien remarquer que, si l'on ne veut pas mettre à part les surfaces singulières, plans et droites-quadratiques, tous les modules se réduisent à un seul terme, et ce ne sont plus des produits symboliques, mais de véritables produits que l'on a à considérer.

Les mêmes observations s'appliquent aux complexes de coniques. Je suis même en mesure d'affirmer que des propriétés analogues existent pour les complexes de courbes planes et de surfaces de degré quelconque.
