BULLETIN DE LA S. M. F.

CAMILLE JORDAN

Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires

Bulletin de la S. M. F., tome 2 (1873-1874), p. 100-127

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1873-1874__2__100_1>

Mémoire sur une application de la théorie des substitutions à l'étude des équations différentielles linéaires; par M. Camille Jordan.

(Séance du 8 avril 1874)

I

1. Soit

$$(1)\qquad P = p\frac{d^n y}{dx^n} + p_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + p_n y = 0\ .$$

une équation linéaire d'ordre n, dont les coefficients soient des fonctions entières de x (ou plus généralement des séries convergentes dans toute l'étendue du plan).

Choisissons à volonté la valeur initiale ξ de la variable imaginaire x, en ayant soin d'éviter les valeurs $\alpha, \beta, \ldots$, qui annulent p, et donnons-nous arbitrairement les valeurs initiales de $y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$. A chaque système de valeurs de ces quantités correspondra, d'après Cauchy, une intégrale y, qui variera avec x suivant une loi parfaitement définie, pourvu qu'on évite de faire passer x par les valeurs $\alpha, \beta, \ldots$.

Soient d'ailleurs $y_1, \ldots, y_n$ des intégrales particulières choisies de telle sorte que leurs valeurs initiales et celles de leurs $n-1$ premières dérivées, $(y_1), \ldots, (y_n)$, $\left(\frac{dy_1}{dx}\right), \ldots, \left(\frac{dy_n}{dx}\right), \ldots$, aient un déterminant différent de zéro; et soit y une autre intégrale quelconque, correspondant aux valeurs initiales (y), $\left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots$. On pourra déterminer des constantes $C_1, \ldots, C_n$ par les relations

$$(y) = C_1(y_1) + \ldots + C_n(y_n),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = C_1\left(\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + C_n\left(\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\right).$$

On en déduira, en vertu de l'équation différentielle,

$$\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right) = C_1\left(\frac{d^n y_1}{dx^n}\right) + \ldots + C_n\left(\frac{d^n y}{dx^n}\right),$$

et par suite on aura, d'une manière générale, dans toute la portion du plan où les intégrales sont développables en série convergente suivant les puissances de $x-\xi$,

$$y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n.$$

II. Supposons maintenant que x, après avoir varié suivant une loi déterminée quelconque, revienne à son point de départ, et suivons les variations de l'intégrale y_1 et de ses dérivées. Soient $(y), \left(\frac{dy}{dx}\right), \ldots, \left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)$ leurs valeurs finales. Nous aurons passé, comme on le voit, de l'intégrale y_1 à l'intégrale $y = C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n$. On passera de même de l'intégrale y_2 à une nouvelle intégrale, de la forme $D_1 y_1 + \ldots + D_n y_n$; etc. Par suite, l'altération produite sur le système des intégrales $y_1, \ldots, y_n$ pourra être représentée par une substitution linéaire (*)

$$A = \begin{vmatrix} y_1 & C_1 y_1 + \ldots + C_n y_n \\ y_2 & D_1 y_1 + \ldots + D_n y_n \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}.$$

(*) Pour plus de détails sur ce sujet, consulter un mémoire de M. Fuchs (*Journal de M. Borchardt*, t. LXVI).

Si maintenant nous faisons varier x de toutes les manières possibles, de manière à envelopper successivement les divers points singuliers $\alpha, \beta, \ldots$, nous obtiendrons un certain nombre de substitutions dont la combinaison formera un groupe G. Ce groupe sera susceptible de diverses formes, suivant le choix des intégrales particulières $y_1, \ldots, y_n$. (Il est clair qu'on peut prendre pour intégrales indépendantes un système de n fonctions linéaires quelconques de $y_1, \ldots, y_n$, pourvu que leur déterminant ne soit pas nul.)

III. Le groupe G caractérise dans ce qu'il a d'essentiel le type de l'équation différentielle qui lui donne naissance, et reflète ses principales propriétés.

Ainsi cherchons à quelles conditions toutes les intégrales de l'équation $P=0$ satisferont à des équations algébriques ayant pour coefficients des fonctions synectiques de x.

Il faut pour cela que les diverses fonctions que les substitutions de G font succéder à chacune des fonctions $y_1, \ldots, y_n$ soient en nombre limité. Par suite, G ne devra contenir qu'un nombre limité de substitutions. Et cette condition sera évidemment suffisante.

IV. Voyons en second lieu (*) comment on pourra reconnaître si l'équation (1) a une intégrale commune avec une équation analogue d'ordre inférieur

$$Q = q\frac{d^\nu y}{dx^\nu} + q_1\frac{d^{\nu-1}y}{dx^{\nu-1}} + \ldots + q_\nu y = 0$$

(en excluant la solution évidente $y=0$).

La fonction y étant supposée satisfaire à la fois aux équations P et Q, satisfera à l'équation

$$(2) \qquad R = qP - pQ^{n-\nu} - f_1 Q^{n-\nu-1} - \ldots - f_{n-\nu} Q = 0,$$

où $Q^{(\rho)}$ désigne la ρ^{me} dérivée de Q, et où $f_1, \ldots, f_{n-\nu}$ sont des fonctions de x choisies de manière à annuler les coefficients $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \ldots, \frac{d^\nu y}{dx^\nu}$.

Toutes les intégrales communes à $P=0$ et à $Q=0$ satisferont à l'équation $R=0$, et réciproquement. Donc si R est nul identiquement, toutes les intégrales de $Q=0$ satisferont à $P=0$. Dans le cas contraire, opérons sur R et Q comme nous l'avons fait sur P et Q; nous obtiendrons une nouvelle équation $S=0$, d'ordre moindre que $R=0$ et à laquelle satisferont les intégrales communes. Si S est nul identiquement, toutes les intégrales de $R=0$ satisferont à $Q=0$, et par suite à $P=0$. Poursuivant ainsi, on arrivera

(*) Frobenius, *Sur l'irréductibilité des équations différentielles linéaires* (*Journal de M. Borchardt*, t. LXXVI).

à une équation dont toutes les intégrales satisferont à $P=0$; car, sans cela, on finirait par obtenir une équation de la forme

$$y\,\varphi(x)=0,$$

laquelle n'a plus que la solution $y=0$.

V. Supposons donc qu'il existe une équation linéaire $T=0$, d'ordre $m<n$, dont toutes les intégrales satisfassent à $P=0$. Soient $X_1, \ldots, X_m$ un système de m intégrales distinctes de l'équation $T=0$; $y_{m+1}, \ldots, y_n$, d'autres intégrales de l'équation $P=0$, qui forment avec les précédentes un système de n intégrales distinctes.

Si l'on fait varier x d'une manière arbitraire, les intégrales $X_1, \ldots, X_m$ de l'équation $T=0$ seront transformées en des fonctions linéaires de $X_1, \ldots, X_m$; par suite, toutes les substitutions du groupe de P seront de la forme

$$\left|\begin{array}{cc} X_1, \ldots, X_m & f_1, \ldots, f_m \\ y_{m+1}, \ldots, y_n & f_{m+1}, \ldots, f_n \end{array}\right|,$$

où $f_1, \ldots, f_m$ ne dépendent que de $X_1, \ldots, X_m$, tandis que $f_{m+1}, \ldots, f_n$ pourront dépendre de toutes les variables $X_1, \ldots, X_m, y_{m+1}, \ldots, y_n$.

Réciproquement, si l'on peut choisir $y_1, \ldots, y_m$, de telle sorte que G n'ait que des substitutions de cette forme, ces m intégrales satisferont à l'équation

$$(3)\qquad \left|\begin{array}{cccc} y & \frac{dy}{dx} & \cdots & \frac{d^m y}{dx^m} \\ y_1 & \frac{dy_1}{dx} & \cdots & \frac{d^m y_1}{dx^m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_m & \frac{dy_m}{dx} & \cdots & \frac{d^m y_m}{dx_m} \end{array}\right| = 0,$$

où les coefficients de y et de ses dérivées ont pour rapports des fonctions monodromes de x.

En effet, si l'on fait décrire à x un contour fermé quelconque, de telle sorte que $y_1, y_2, \ldots$ soient changés en $C_1 y_1 + \ldots + C_m y_m$, $D_1 y_1 + \ldots + D_m y_m$, ..., les coefficients de l'équation (3) seront tous multipliés par un même facteur, à savoir le déterminant de $C_1, \ldots, C_m, D_1, \ldots, D_m, \ldots$. Leurs rapports reprendront donc la même valeur, et seront par suite des fonctions monodromes de x.

VI. On voit par ces exemples que dans la théorie des équations différentielles linéaires, comme dans celle des équations algébriques, on aura trois catégories de problèmes à résoudre :

1° L'équation étant donnée, déterminer son groupe. Cette question est du ressort du calcul intégral ;

2° Déterminer les conditions auxquelles le groupe doit satisfaire pour que l'équation donnée jouisse de telle ou telle propriété;

3° Le groupe étant connu, vérifier s'il satisfait ou non aux conditions requises. Cette dernière question ne dépend plus que de la théorie des substitutions.

VII. A cette dernière catégorie se rapporte la question suivante, qui fait l'objet du mémoire actuel :

Etant donné un groupe G, *dérivé de substitutions linéaires* A, B, ... *entre* n *variables, reconnaître si l'équation différentielle linéaire qui a pour groupe* G *est satisfaite par les intégrales d'équations analogues d'un ordre inférieur à* n, *et déterminer les groupes de ces équations réduites.*

D'après ce qu'on a vu plus haut, ce problème revient au suivant :

Déterminer de toutes les manières possibles un système de fonctions linéaires $X_1, \ldots, X_m$ *des variables* $y_1, \ldots, y_n$ *telles que chacune des substitutions* A, B, ... *dont* G *est dérivé les remplace par des fonctions linéaires de* $X_1, \ldots, X_m$.

VIII. On peut d'ailleurs faire subir à cet énoncé une légère modification, que nous allons exposer.

Soit $X_1, \ldots, X_m$ un des systèmes de fonctions qu'il s'agit de déterminer. Il est clair que chaque substitution de G transformera les unes dans les autres les diverses fonctions du faisceau (*) F formé par les fonctions linéaires de $X_1, \ldots, X_m$. Si d'ailleurs on choisit dans ce faisceau m fonctions quelconques, linéairement distinctes, toutes les autres pourront s'exprimer linéairement par celles-là, lesquelles formeront un système, jouissant évidemment de la même propriété fondamentale que $X_1, \ldots, X_m$. En remplaçant la considération du système des fonctions particulières $X_1, \ldots, X_m$ par celle du faisceau F, on aura donc l'avantage d'un certain arbitraire dans le choix des fonctions dont on le considère comme dérivé.

Dans cet ordre d'idées, le problème pourra s'énoncer comme il suit :

Déterminer tous les faisceaux tels que chacune des substitutions A, B, ... *transforme leurs fonctions les unes dans les autres.*

On aura toujours un semblable faisceau, formé par l'ensemble des fonctions linéaires de $y_1, \ldots, y_n$. S'il n'y en a pas d'autre, le groupe G sera dit *primaire*, et l'équation différentielle correspondante sera *irréductible*. Dans le cas contraire, à chacun des autres faisceaux, dérivés de fonctions distinctes $X_1, \ldots, X_m$ en nombre $< n$, correspondra une équation différentielle

(*) Nous dirons, suivant un usage assez généralement admis, qu'un système de fonctions linéaires forment un *faisceau*, lorsque toute combinaison linéaire de ces fonctions fait elle-même partie de ce système. Un faisceau quelconque F contiendra un certain nombre de fonctions linéairement distinctes, en fonction linéaire desquelles on pourra exprimer toutes les autres, et dont nous dirons que F est *dérivé*.

On voit que la notion du faisceau dans la théorie des fonctions linéaires est analogue à celle du groupe dans la théorie des substitions.

réduite, dont le groupe sera formé par les altérations que les substitutions de G font subir à $X_1, \ldots, X_m$.

IX. Nous commencerons par indiquer (§ II et III) un moyen de reconnaître avec certitude si G est primaire ou non, et de déterminer dans ce dernier cas un faisceau contenant moins de n fonctions linéairement distinctes. Cette question résolue, il sera facile de déterminer tous les faisceaux possibles ; ce qui fera l'objet du § IV.

II

X. Soit

$$(4) \qquad A = \begin{vmatrix} y_1 & C_1y_1 + \ldots + C_ny_n \\ y_2 & D_1y_1 + \ldots + D_ny_n \\ \cdots & \cdots \end{vmatrix}$$

l'une quelconque des substitutions A, B, C, ... dont G est dérivé. Nous prendrons pour variables indépendantes au lieu de $y_1, y_2, \ldots$ des fonctions linéaires de ces variables, choisies de manière à ramener A à sa forme canonique. Nous avons exposé avec détail dans notre *Traité des substitutions*, livre II, chap. II, les moyens d'atteindre ce résultat. Nous nous bornerons ici à rappeler brièvement les points les plus indispensables à l'intelligence de ce qui va suivre.

La question dépend essentiellement, comme on sait, de la résolution de l'équation *caractéristique*

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} C_1 - s & C_2 & \ldots C_n \\ D_1 & D_2 - s & \ldots D_n \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} = 0.$$

Soient a, b, ... les racines distinctes que cette équation comporte. A chacune d'elles, telle que a, correspondra en général une fonction $y'_1 = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_n y_n$ que A multiplie par a ; et les rapports des coefficients $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ seront donnés par les équations

$$(6) \qquad \begin{array}{l} (C_1 - a)\alpha_1 + C_2\alpha_2 + \ \ldots \ + C_n\alpha_n = 0, \\ D_1\alpha_1 + (D_2 - a)\alpha_2 + \ \ldots \ + D_n\alpha_n = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Mais si a annule non-seulement le déterminant (5), mais ses mineurs d'ordre $1, \ldots, k_1 - 1$, les équations (6) laisseront indéterminés $k_1 - 1$ de ces rapports, et l'on aura k_1 fonctions distinctes $y'_1, \ldots, y_1^{k_1}$ que A multiplie par a.

Dans le cas le plus général, on pourra choisir les nouvelles variables

$y_1', \ldots, y_1^{k_1}, y_2', \ldots, y_2^{k_2}, \ldots, y_p', \ldots, y_p^{k_p}, z_1', \ldots, z_1^{l_1}, z_2', \ldots, z_2^{l_2}, \ldots$ de manière à ramener A à la forme

$$A = \left| \begin{array}{ll} y_1', \ldots, y_1^{k_1} & ay_1', \ldots, ay_1^{k_1} \\ y_2', \ldots, y_2^{k_2} & a(y_2' + y_1'), \ldots, a(y_2^{k_2} + y_1^{k_2}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_p', \ldots, y_p^{k_p} & a(y_p' + y_{p-1}'), \ldots, a(y_p^{k_p} + y_{p-1}^{k_p}) \\ z_1', \ldots, z_1^{l_1} & bz_1', \ldots, bz_1^{l_1} \\ z_2', \ldots, z_2^{l_2} & b(z_2' + z_1'), \ldots, b(z_2^{l_2} + z_1^{l_2}) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \end{array} \right|,$$

les entiers $k_1, k_2, \ldots, l_1, l_2, \ldots$ satisfaisant aux inégalités

$$k_1 \geqq k_2 \geqq \ldots \geqq k_p, \quad l_1 \geqq l_2 \geqq \ldots, \ldots,$$

et $k_1 + k_2 + \ldots + k_p$, $l_1 + l_2 + \ldots, \ldots$ étant les degrés de multiplicité respectifs des racines $a, b, \ldots$.

Nous supposerons dans cette section que l'équation (5) a plusieurs racines distinctes $a, b, \ldots$.

Les nouvelles variables pourront se répartir en classes $y_1', \ldots, y_p^{k_p}$; $z_1', \ldots, z_2^{l_2}, \ldots$; respectivement correspondantes aux racines $a, b, \ldots$.

XI. Soit maintenant F un faisceau tel que les substitutions de G transforment ces fonctions les unes dans les autres. Nous allons montrer qu'*on peut considérer* F *comme dérivé d'un certain nombre de fonctions distinctes, ne contenant chacune que les variables d'une seule classe.*

Soit en effet

$$(7) \qquad f = Y + Z + \ldots$$

l'une quelconque des fonctions du faisceau F, Y étant une fonction des indices y de la première classe, Z une fonction des indices z de la seconde classe, etc.; et soit Φ le faisceau dérivé de f et de ses transformées $f', f'', \ldots$ par les diverses puissances de A. Chacune de ces transformées, et, par suite, chacune des fonctions de Φ, appartiendra au faisceau F.

Cela posé, admettons, pour fixer les idées, que ρ soit le maximum des indices de celles des variables y qui figurent dans Y; σ le maximum des indices de celles des variables z qui figurent dans Z; etc. ; nous établirons le théorème suivant :

Théorème. — *Le faisceau Φ contient chacune des fonctions partielles* Y, Z, ... *Il sera d'ailleurs dérivé de $\rho + \sigma + \ldots$ fonctions distinctes, dont ρ formées exclusivement avec les variables y, σ formées exclusivement avec les variables z, etc.*

XII. Nous allons montrer en premier lieu que *le nombre des fonctions distinctes que contient Φ ne peut depasser $\rho + \sigma + \ldots$.*

En effet, le faisceau Φ, dérivé des transformées de f par les puissances de A, est évidemment contenu dans le faisceau Φ' dérivé des transformées des fonctions partielles Y,Z,.... Ce dernier s'obtient en combinant ensemble les transformées de Y, lesquelles ne contiennent que les y, celles de Z, qui ne contiennent que les z, etc.

Cherchons donc combien les transformées de Y, par exemple, fourniront de fonctions distinctes. Le faisceau Φ' produit par ces transformées contiendra la fonction

$$Y = \lambda' y'_\rho + \lambda'' y''_\rho + \dots + Y_{\rho-1},$$

où $Y_{\rho-1}$ ne contient plus que celle des variables y dont l'indice est $< \rho - 1$. Il contiendra de même la transformée de Y par A, que nous désignerons par Y_A. Il contiendra donc la fonction

$$Y' = \frac{1}{a} Y_A - Y, \tag{8}$$

laquelle sera, comme on le voit aisément, de la forme

$$Y' = \lambda' y'_{\rho-1} + \lambda'' y''_{\rho-1} + \dots + Y_{\rho-2},$$

Y_1 ne contenant plus que celle des variables y dont l'indice est $< \rho - 2$.

On voit de même que Φ'_y contiendra

$$Y'' = \frac{1}{a} Y'_A - Y' = \lambda' y'_{\rho-2} + \lambda'' y''_{\rho-2} + \dots + Y_{\rho-3}, \tag{9}$$

où Y_2 ne contient plus que les variables dont l'indice $< \rho - 3$.

Continuant ainsi, on arrivera à une dernière fonction

$$Y^{\rho-1} = \frac{1}{a} Y_A^{\rho-2} - Y^{\rho-2} = \lambda' y'_1 + \lambda'' y''_1 + \dots, \tag{10}$$

pour laquelle on aura identiquement

$$\frac{1}{a} Y_A^{\rho-1} - Y^{\rho-1} = 0. \tag{11}$$

Les ρ fonctions Y,Y', ... sont évidemment distinctes, chacune d'elles contenant des variables qui ne figurent pas dans les suivantes. D'ailleurs les équations (8), (9), (10), (11) peuvent se mettre sous la forme

$$Y_A = a(Y + Y'),\ Y'_A = a(Y' + Y''),\ \dots,\ Y_A^{\rho-1} = aY^{\rho-1}.$$

Donc la substitution A transforme chacune de ces fonctions en une fonction linéaire de ces mêmes fonctions. Cela aura lieu évidemment quelque nombre de fois que l'on répète cette substitution. Donc le nombre des fonctions distinctes dont Φ' est dérivé est précisément égal à ρ.

Le faisceau Φ'_z formé par les transformées de Z contiendra de même σ fonctions distinctes; etc. Donc le faisceau Φ' dépendra de $\rho+\sigma+\ldots$ fonctions distinctes; et le faisceau Φ, qui y est contenu, dépendra tout au plus de ce nombre de fonctions.

XIII. Nous allons prouver d'autre part que Φ contient au moins $\rho+\sigma+\ldots$ *fonctions distinctes.*

Pour démontrer cette seconde partie de notre proposition, nous remarquerons que Φ contient la fonction

$$(12) \qquad f=\lambda y_\rho+\lambda' y'_\rho+\ldots+Y_{\rho-1}+Z+\ldots.$$

Il contiendra sa transformée f_A par A, et, par suite, la fonction

$$(13) \qquad f'=\frac{1}{a-b}\left(f_A-bf\right),$$

laquelle est de la forme

$$(14) \qquad f'=\lambda y_\rho+\lambda' y'_\rho+\ldots+Y'_{\rho-1}+\ldots+Z'+\ldots,$$

Y′ étant une fonction analogue à Y, et Z′ une fonction analogue à Z, mais de laquelle ont disparu celles des variables z dont l'indice est égal au maximum σ.

De même Φ contiendra la fonction

$$(15) \qquad f''=\frac{1}{a-b}\left(f'_A-bf'\right)=\lambda y_\rho+\lambda' y'_\rho+\ldots+Y''_{\rho-1}+Z''+\ldots,$$

où Z″ ne contient plus celles des variables z dont l'indice dépasse $\sigma-2$. Poursuivant ainsi, on voit que Φ contient une fonction d'où tous les indices z ont disparu; s'il y a d'autres séries de variables $u,\ldots$, correspondant à d'autres racines $c,\ldots$ de l'équation caractéristique de A, on les fera disparaître de même. Donc Φ contient une fonction où ne figurent plus que les indices y et qui sera de la forme

$$(16) \qquad \varphi=\lambda y_\rho+\lambda' y'_\rho+\ldots+\mathcal{Y}_{\rho-1}.$$

Ses transformées par les puissances de A, combinées entre elles, donneront ρ fonctions distinctes des seules variables y, appartenant à Φ (voir la première partie de la démonstration).

On verrait de même que Φ contient σ fonctions distinctes des variables z; etc.; soit en tout $\rho+\sigma+\ldots$ fonctions distinctes.

XIV. Le faisceau Φ, étant contenu dans Φ' et dépendant comme ce dernier de $\rho+\sigma+\ldots$ fonctions distinctes, se confondra avec lui. Donc il contiendra les fonctions $Y, Z, \ldots$. *A fortiori*, ces fonctions appartiendront au faisceau F, qui contient Φ. Nous obtenons donc ce résultat :

Si le faisceau F *contient la fonction* $f = Y + Z + \ldots$, *il contiendra les fonctions partielles* $Y, Z, \ldots$.

Cela posé, soient $Y_1, Y_2, \ldots$ les fonctions linéairement distinctes et ne dépendant que des variables y que contient le faisceau F ; $Z_1, Z_2, \ldots$ les fonctions distinctes contenues dans ce faisceau et ne dépendant que des indices z ; etc. Le faisceau F sera dérivé des fonctions $Y_1, Y_2, \ldots, Z_1, Z_2, \ldots, \ldots$. En effet, soit $f = Y + Z + \ldots$ une quelconque des fonctions de F. Ce faisceau contient Y, qui ne dépend que des variables y, et par suite sera une fonction linéaire de $Y_1, Y_2, \ldots$. De même Z sera une fonction linéaire de $Z_1, Z_2, \ldots$, etc.

La propriété du faisceau F, énoncée au n° XI, se trouve ainsi démontrée.

XV. Nous venons de voir que les fonctions distinctes dont F est dérivé peuvent être choisies de manière à ne contenir chacune qu'une classe de variables. Il peut se faire que certaines classes ne se trouvent représentées par aucune fonction. Mais, dans tous les cas, F contiendra, soit une fonction Y des variables de la première classe, soit une fonction Z des variables de la seconde classe, etc.

XVI. *Premier cas.* — Supposons que F contienne une fonction

$$f = \lambda y'_1 + \mu y''_1 + \ldots = Y \tag{17}$$

des seules variables y. Il contiendra ses transformées $f_B, f_C, \ldots$ par les substitutions $B, C, \ldots$; ces nouvelles fonctions sont linéaires, d'une part, relativement aux variables $y, z, \ldots$, d'autre part relativement aux coefficients $\lambda, \mu, \ldots$. On aura d'ailleurs

$$f_B = Y^B + Z^B + \ldots, \quad f_C = Y^C + Z^C + \ldots, \quad \ldots, \tag{18}$$

$Y^B, Y^C, \ldots$ étant des fonctions des variables y, $Z^B, Z^C, \ldots$ des fonctions des variables z, etc. Enfin F contiendra les faisceaux dérivés des transformées de $f_B, f_C, \ldots$ par les puissances de A, lesquels sont, comme nous l'avons vu (n^{os} XII à XIV), dérivés des fonctions

$$\left\{\begin{array}{llll}
Y^B, & Y'^B = \frac{1}{a} Y^B_A - Y^B, & Y''^B = \frac{1}{a} Y'^B_A - Y'^B, & \ldots \\
Y^C, & Y'^C = \frac{1}{a} Y^C_A - Y^C, & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
Z^B, & Z'^B = \frac{1}{b} Z^B_A - Z^B, & \ldots & \ldots \\
Z^C, & Z'^C = \frac{1}{b} Z^C_A - Z^C, & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}\right. \tag{19}$$

qui ne contiennent chacune que des variables d'une seule classe.

XVII. Les fonctions $Y^B, Y'^B, \ldots, Y^C, Y'^C, \ldots, Z^B, Z'^B, \ldots, Z^C, Z'^C, \ldots$ sont, ainsi que f, des fonctions linéaires des produits $P_1, P_2, \ldots$ obtenus en multipliant successivement les divers coefficients $\lambda, \mu, \ldots$ par les n variables $y, z, \ldots$. Si quelques-unes de ces fonctions peuvent s'exprimer linéairement en fonction des autres et de f (ce qu'on vérifiera aisément), nous les effacerons. Cette simplification faite, il nous restera un certain nombre de fonctions distinctes $f, f', \ldots, f^r$.

XVIII. Transformons maintenant la fonction f' successivement par B,C,.... Les transformées $f'_B, f'_C, \ldots$ seront de la forme

$$(20) \qquad f'_B = \mathfrak{Y}^B + \mathfrak{Z}^B + \ldots, \quad f'_C = \mathfrak{Y}^C + \mathfrak{Z}^C + \ldots, \quad \ldots,$$

où $\mathfrak{Y}^B, \mathfrak{Y}^C, \ldots$ sont des fonctions des variables y, $\mathfrak{Z}^B, \mathfrak{Z}^C, \ldots$ des fonctions des variables z, etc.; et F contiendra les fonctions

$$(21) \quad \mathfrak{Y}^B, \mathfrak{Y}'^B = \frac{1}{a}\mathfrak{Y}^B_A - \mathfrak{Y}^B, \ldots, \mathfrak{Y}^C, \mathfrak{Y}'^C, \ldots, \mathfrak{Z}^B, \mathfrak{Z}'^B, \ldots, \mathfrak{Z}^C, \ldots$$

On déduira de même de chacune des fonctions $f'', \ldots, f^r$ une série de fonctions analogues à celles-ci, et toutes contenues dans F.

Les nouvelles fonctions ainsi obtenues sont encore linéaires, par rapport aux produits $P_1, P_2, \ldots$. Si quelques-unes d'entre elles peuvent s'exprimer linéairement en fonction des autres et de $f, f', \ldots, f^r$, nous les effacerons. Soient $f^{r+1}, \ldots, f^s$ les fonctions restantes après cette simplification. Opérons sur elles comme nous l'avons fait d'abord sur f, puis sur $f', \ldots f^r$; nous obtiendrons encore de nouvelles fonctions de $P_1, P_2, \ldots$ contenues dans F. Nous effacerons celles de ces nouvelles fonctions qui s'expriment linéairement en fonction des autres et de $f, f', \ldots, f^s$. Si, cette simplification faite, il en subsiste quelques-unes, telles que $f^{s+1}, \ldots, f^t$, on opérera de même sur elles, etc. On ne s'arrêtera que lorsque l'on n'obtiendra plus de fonctions nouvelles distinctes de celles déjà trouvées, ce qui arrivera nécessairement, le nombre total des fonctions linéaires distinctes que l'on peut former avec les variables $P_1, P_2, \ldots$ étant limité.

XIX. Les fonctions $f, f', \ldots, f^t$, obtenues comme il vient d'être indiqué, jouiront de la propriété que chacune des substitutions de G les transforme en fonctions linéaires de $f, f', \ldots, f^t$. Il suffit évidemment de prouver la chose pour les substitutions A,B,C,... dont G est dérivé.

Soit, pour fixer les idées, $f' = Y'^B$ l'une de ces fonctions. En vertu des équations (19), sa transformée Y'^B_A par A sera égale à $a(Y''^B + Y'^B)$; d'autre part, ses transformées par B,C,... sont respectivement $\mathfrak{Y}'^B + \mathfrak{Z}'^B + \ldots$, $\mathfrak{Y}'^C + \mathfrak{Z}'^C + \ldots, \ldots$. Or chacune des fonctions partielles qui entrent dans ces expressions est une fonction linéaire de $f, f', \ldots, f^t$.

Le faisceau Ψ, dérivé des fonctions $f, f', \ldots, f^t$ jouira donc de la propriété que ses diverses fonctions sont transformées les unes dans les autres par les substitutions de G.

XX. On doit d'ailleurs remarquer que, d'après la manière dont les fonctions $f, f', \ldots, f^t$ ont été obtenues, chacune d'elles ne contient que les variables d'une seule classe.

Soient en particulier $f, f_1, f_2, \ldots$ celles de ces fonctions qui ne contiennent que les indices y de la première classe.

Le faisceau Ψ_{y_1} formé par celles des fonctions de Ψ qui dépendent des indices y, sera dérivé des fonctions $f, f_1, f_2, \ldots$, ou, ce qui revient au même, des fonctions $f, \varphi_1 = f_1 + \omega_1 f, \varphi_2 = f_2 + \omega_2 f, \ldots$, où $\omega_1, \omega_2, \ldots$ sont des constantes arbitraires, que nous allons déterminer comme il suit.

XXI. La fonction f_1 est de la forme

$$(22)\quad (ay'_1 + by''_1 + \ldots + dy'_2 + \ldots)\lambda + (a'y'_1 + b'y''_1 + \ldots + d'y''_2 + \ldots)\mu + \ldots$$

et φ_1 sera de la forme

$$(23)\quad \begin{aligned} &[(a+\omega_1)y'_1 + by''_1 + \ldots + dy'_2 + \ldots]\lambda \\ &\qquad + [a'y'_1 + (b'+\omega_1)y''_1 + \ldots + d'y''_2 + \ldots]\mu + \ldots. \end{aligned}$$

Cela posé, nous déterminerons ω_1 de telle sorte que le déterminant

$$(24)\qquad \begin{vmatrix} a+\omega_1 & b & d & \ldots \\ a' & b'+\omega_1 & d' & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}$$

soit différent de 0, ce qui sera évidemment possible, car ce déterminant égalé à zéro donne une équation en ω_1 dont le premier terme a l'unité pour coefficient. Il suffira d'éviter les racines de cette équation.

Les autres constantes $\omega_2, \ldots$ se détermineront d'une manière analogue.

XXII. Cela posé, la fonction φ_1 s'obtient en opérant sur la fonction

$$(25)\qquad f = \lambda y'_1 + \mu y''_1 + \ldots$$

la substitution

$$(26)\qquad \mathcal{A} = \begin{vmatrix} y'_1 & (a+\omega_1)y'_1 + by''_1 + \ldots \\ y''_1 & a'y'_1 + (b'+\omega_1)y''_1 + \ldots \\ \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

De même les fonctions $\varphi_2, \ldots$ s'obtiendront en opérant sur f des substitution $\mathcal{B}, \ldots$.

Par suite, il est clair que le faisceau Ψ_y sera identique au faisceau dérivé des fonctions transformées de f par les substitutions du groupe Γ dérivé des substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$.

Nous supposerons que l'on sache reconnaître si Γ est primaire ou non, et que, dans ce dernier cas, l'on sache y déterminer un faisceau $\mathfrak{F}$ dérivé d'un nombre de fonctions distinctes inférieur à celui des indices y (et tel, que chacune des substitutions $\mathcal{A},\mathcal{B},\ldots$ remplace ses fonctions les unes par les autres).

XXIII. 1° Si Γ n'est pas primaire, soit ξ l'une quelconque des fonctions de $\mathfrak{F}$; nous disposerons des coefficients indéterminés $\lambda,\mu,\ldots$ de manière à poser

$$\lambda y'_1 + \mu y'_2 + \ldots = \xi.$$

Les transformées $\xi, \xi', \ldots$ de cette fonction par les substitutions dérivées de $\mathcal{A},\mathcal{B},\ldots$ combinées ensemble, formeront un faisceau contenu dans $\mathfrak{F}$ et dépendant par suite d'un nombre ρ de fonctions distinctes au plus égal à celui des fonctions distinctes que contenait $\mathfrak{F}$. Cela posé, parmi les fonctions distinctes dont Ψ est dérivé, et qui ne contiennent chacune qu'une classe de variables, il y en aura ρ seulement qui contiennent les variables y, dont le nombre surpasse ρ, par hypothèse. Dans chacune des autres classes, il ne pourra y avoir plus de fonctions distinctes dans Ψ qu'il n'y a de variables dont elles dépendent. Donc Ψ dépendra de moins de n fonctions distinctes, que l'on obtiendra sans peine en substituant dans $f, f', \ldots, f^t$ les valeurs particulières de $\lambda,\mu,\ldots$ et effaçant celles des fonctions de la suite qui peuvent s'exprimer linéairement par les autres, une fois la substitution effectuée.

Ainsi, dans ce cas, G ne sera pas primaire, et nous aurons déterminé, comme on le demandait, un faisceau Ψ contenant moins de n fonctions distinctes.

XXIV. 2° Si Γ est primaire, quelque système de valeurs que l'on donne aux coefficients $\lambda,\mu,\ldots$, le faisceau Ψ_y, obtenu en transformant $\lambda y'_1 + \mu y'_2 + \ldots$ par les substitutions de Γ, dépendra d'un nombre de fonctions distinctes égal à celui des variables y. Donc il contiendra au nombre de ses fonctions toutes celles que l'on peut former avec ces variables, et notamment y'_1.

Donc, dans ce cas, F contiendra nécessairement la fonction y'_1. On pourra donc, sans nuire à la généralité de la question, poser $\lambda = 1, \mu = \ldots = 0$, et vérifier si le faisceau Ψ, formé dans cette hypothèse, dépend de n fonctions distinctes, ou d'un moindre nombre. Dans le premier cas, F, qui contient Ψ, dépendra nécessairement de n fonctions distinctes. Dans le second cas, G ne sera pas primaire, et les fonctions distinctes dont Ψ dépend formeront un système de fonctions tel qu'on demandait de le déterminer.

XXV. *Second cas.* — Supposons que F ne contienne aucune fonction des variables y.

Si F contient une fonction Z des variables z de la seconde classe, on opérera absolument de même que dans l'examen du premier cas, et l'on déterminera, s'il y a lieu, un faisceau Ψ contenu dans F et dépendant de moins de n fonctions distinctes.

De même si F ne contient aucune fonction des variables y, ni des variables z, mais une fonction U des variables de la troisième classe.

Continuant ainsi, on voit qu'on pourra toujours déterminer un faisceau Ψ dépendant de n fonctions distinctes, à moins que F ne contienne nécessairement et dans toute hypothèse n fonctions distinctes, auquel cas G sera primaire par définition.

XXVI. La solution précédente suppose que l'on sache résoudre pour le groupe Γ (et ses analogues) la question posée pour le groupe G. Mais le nombre des variables est moindre dans Γ que dans G, puisque Γ ne contient que les variables d'une seule classe. Le problème est donc réduit, et pourra être considéré comme résolu, lorsque nous aurons examiné le cas que nous avons négligé jusqu'à présent, à savoir celui où l'équation caractéristique de la substitution A n'a qu'une seule racine.

III

XXVII. Admettons maintenant que l'équation caractéristique de A n'ait qu'une seule racine a. Si, parmi les substitutions de G, on peut en déterminer une S dont l'équation caractéristique ait plusieurs racines distinctes, on pourra évidemment considérer G comme dérivé des substitutions S,A,B, ...; et raisonnant sur S comme nous l'avons fait précédemment sur A, on obtiendra la même réduction que tout à l'heure.

XXVIII. Nous supposerons d'abord que G ne contient aucune substitution telle que S. En suivant les conséquences de cette hypothèse, nous montrerons que G n'est pas primaire, et nous mettrons ses substitutions sous une forme-type qui mette cette propriété en évidence.

Cette étude préliminaire achevée, nous montrerons comment on peut vérifier immédiatement si l'hypothèse admise est satisfaite, et, dans ce cas, ramener les substitutions de G à leur forme-type.

Dans le cas contraire, nous ferons voir par quelle série d'opérations on pourra obtenir, soit la détermination directe d'un faisceau Ψ contenant moins de n fonctions distinctes, soit une substitution S dont l'équation caractéristique ait plusieurs racines distinctes; ce qui fournira par suite la solution, ou tout au moins la réduction du problème proposé.

XXIX. Admettons que G ne contienne aucune substitution dont l'équation caractéristique ait plusieurs racines distinctes, et voyons ce qui résulte de cette hypothèse.

Soient a la racine unique de l'équation caractéristique de A, b la racine unique de l'équation caractéristique de B, etc. On pourra poser

$$A = a\mathcal{A}, \quad B = b\mathcal{B}, \ \ldots, \tag{27}$$

a, b, ... représentant des substitutions qui multiplient toutes les variables par a, par b, etc., et $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$ des substitutions de déterminant 1 et dont l'équation caractéristique se réduira à $(s-1)^n = 0$.

Soit $T = A^\alpha B^\beta \dots = a^\alpha b^\beta \dots \mathfrak{A}^\alpha \mathfrak{B}^\beta \dots$ une substitution quelconque de G; et considérons la substitution $\mathfrak{T} = \mathfrak{A}^\alpha \mathfrak{B}^\beta \dots$. Soit

$$(28) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \lambda - s & \mu & \dots \\ \lambda_1 & \mu_1 - s & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0$$

son équation caractéristique ; l'équation caractéristique de T aura évidemment pour racines celles de l'équation $\Delta = 0$ respectivement multipliées par le facteur constant $(a^\alpha b^\beta \dots)^n$. Mais, par hypothèse, elle n'a qu'une racine distincte; donc il en est de même de l'équation $\Delta = 0$.

XXX. *La racine unique de l'équation* $\Delta = 0$ *se réduit à l'unité.*

Nous allons démontrer que si cela est vrai pour deux substitutions S et $\mathfrak{T}$ du groupe $\mathfrak{G}$, cela sera vrai pour leur produit $S\mathfrak{T}$. Comme cela est vrai pour $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$, ..., cela sera vrai pour leurs produits deux à deux, trois à trois, etc., et par suite pour toutes les substitutions de $\mathfrak{G}$.

XXXI. Supposons les variables indépendantes choisies de manière à ramener S à sa forme canonique

$$(29) \qquad S = \begin{vmatrix} y_1, \dots, y_r & y_1, \dots, y_r \\ z_1, \dots, z_s & z_1 + y_1, \dots, z_s + y_s \\ u_1, \dots, u_t & u_1 + z_1, \dots, u_t + z_t \\ \dots & \dots \end{vmatrix},$$

et soit

$$(30) \qquad \mathfrak{T} = \begin{vmatrix} y_1 & a_1 y_1 + \dots + b_1 z_1 + \dots + c_1 u_1 + \dots \\ \dots & \dots \\ u_t & d_1 y_1 + \dots + e_1 z_1 + \dots + f_1 u_1 + \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix}$$

on aura

$$(31) \quad S^\lambda \mathfrak{T} = \begin{vmatrix} y_1 & \left(a_1 + b_1\lambda + c_1 \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + \dots\right) y_1 + \dots \\ & + (b_1 + c_1\lambda + \dots) z_1 + \dots + (c_1 + \dots) u_1 + \dots \\ \dots & \dots \\ u_t & \left(d_1 + e_1\lambda + f_1 \frac{\lambda(\lambda-1)}{2} + \dots\right) y_1 + \dots \\ & + (e_1 + f_1\lambda + \dots) z_1 + \dots + (f_1 + \dots) u_1 + \dots \\ \dots & \dots \end{vmatrix},$$

et son équation caractéristique sera de la forme

$$(32) \qquad \Delta = s^n + \varphi s^{n-1} + \varphi_1 s^{n-2} + \ldots = 0,$$

$\varphi, \varphi_1, \ldots$ désignant des fonctions entières de λ.

La racine (unique par hypothèse) de cette équation sera une racine n^{me} de l'unité. En effet, cette racine a pour puissance n^{me} (au signe près, si n est impair) le dernier terme de l'équation (32) lequel est égal à $(-1)^n D$, D étant le déterminant de $S^\lambda \mathfrak{T}$; lequel est égal à l'unité, car S et $\mathfrak{T}$ sont des produits formés avec les substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, qui toutes ont l'unité pour déterminant. On aura donc

$$(33) \qquad \Delta = (s - \theta)^n = 0,$$

θ étant une racine de l'unité.

On devra avoir

$$(34) \qquad \varphi = -n\theta^{n-1}, \quad \varphi_1 = \frac{n(n-1)}{1.2}\theta^{n-2}, \ldots,$$

et, par suite,

$$(35) \qquad \varphi^n = (-n)^n, \quad \varphi_1^n = \left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^n, \ldots.$$

Ces équations sont satisfaites, par hypothèse, pour toute valeur de λ; comme elles sont d'ailleurs un degré fini en λ, elles doivent se réduire à des identités. Donc $\varphi, \varphi_1, \ldots$ sont des constantes, et Δ sera indépendant de λ. Or, en posant $\lambda = 0$, on a, par hypothèse, $\Delta = (s-1)^n$. Donc les substitutions $S\mathfrak{T}, \ldots, S^\lambda\mathfrak{T}, \ldots$ auront toutes la même équation caractéristique $(s-1)^n = 0$.

XXXII. Cela posé, choisissons les variables de manière à ramener $\mathcal{A}$ à sa forme canonique; et, pour rendre le raisonnement plus facile à suivre, faisons une hypothèse particulière. Soit

$$(36) \qquad \mathcal{A} = \left| \begin{matrix} y_1, y_2, y_3, y_4 & y_1, & y_2, & y_3, & y_4 \\ z_1, z_2, z_3 & z_1 + y_1, & z_2 + y_2, & z_3 + y_3 & \end{matrix} \right|.$$

Soit d'autre part

$$(37) \qquad \mathfrak{T} = \left| \begin{matrix} \cdots & \cdots \\ y_\rho & a_{\rho 1} y_1 + \ldots + a_{\rho 4} y_4 + b_{\rho 1} z_1 + \ldots + b_{\rho 3} z_3 \\ \cdots & \cdots \\ z_\rho & c_{\rho 1} y_1 + \ldots + c_{\rho 4} y_4 + d_{\rho 1} z_1 + \ldots + d_{\rho 3} z_3 \\ \cdots & \cdots \end{matrix} \right|$$

une substitution quelconque de $\mathfrak{G}$. On aura

$$(38)\quad \mathcal{A}^{\lambda}\mathfrak{T}=\left|\begin{array}{ll} \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_\rho & (a_{\rho 1}+b_{\rho 1}\lambda)y_1+\dots+(a_{\rho 3}+b_{\rho 3}\lambda)y_3+a_{\rho 4}y_4+b_{\rho 1}z_1+\dots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_\rho & (c_{\rho 1}+d_{\rho 1}\lambda)y_1+\dots+(c_{\rho 3}+d_{\rho 3}\lambda)y_3+c_{\rho 4}y_4+d_{\rho 1}z_1+\dots \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right|,$$

et son équation caractéristique

$$(39)\qquad \Delta=\left|\begin{array}{ccc} a_{11}+b_{11}\lambda-s & a_{12}+b_{12}\lambda & \dots \\ a_{21}+b_{21}\lambda & a_{22}+b_{22}\lambda-s & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{array}\right|=0$$

aura, comme on vient de le voir, ses coefficients indépendants de λ. Mais il est aisé de voir que cette équation contient les termes

$$(40)\qquad \left|\begin{array}{ccc} b_{11}\lambda-s & b_{12}\lambda & b_{13}\lambda \\ b_{21}\lambda & b_{22}\lambda-s & b_{23}\lambda \\ b_{31}\lambda & b_{32}\lambda & b_{33}\lambda-s \end{array}\right| s^4$$

lesquels ne se réduiront avec aucun autre, et par suite devront s'annuler identiquement, quels que soient s et λ.

Égalant séparément à zéro les termes en λs^6, $\lambda^2 s^5$, $\lambda^3 s^4$, il viendra

$$(41)\qquad b_{11}+b_{22}+b_{33}=0,$$

$$(42)\qquad \left|\begin{array}{cc} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{array}\right| + \left|\begin{array}{cc} b_{33} & b_{31} \\ b_{13} & b_{11} \end{array}\right| = 0,$$

$$(43)\qquad \left|\begin{array}{ccc} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right| = 0.$$

XXXIII. Nous remarquerons maintenant que l'on peut, sans altérer l'expression de la substitution $\mathcal{A}$, prendre pour variables indépendantes, au lieu de y_1, y_2, y_3, des fonctions linéaires quelconques de ces variables, pourvu qu'on opère un changement analogue sur les variables z_1, z_2, z_3. Nous allons profiter de cette latitude pour simplifier l'expression de $\mathfrak{T}$.

XXXIV. L'équation (43) nous montre qu'on peut déterminer des nombres l_1, l_2, l_3 satisfaisant à l'équation

$$(44)\qquad l_1(b_{11}z_1+b_{12}z_2+b_{13}z_3)+l_2(b_{21}z_1+b_{22}z_2+b_{23}z_3) + l_3(b_{31}z_1+b_{32}z_2+b_{33}z_3)=0.$$

Si donc on prend pour l'une des nouvelles variables l'expression $l_1y_1+l_2y_2+l_3y_3$, l'expression que $\mathfrak{T}$ lui fait succéder ne contiendra plus les variables z. On aura donc, par cette transformation, fait disparaître de l'expression de $\mathfrak{T}$ les coefficients b_{31}, b_{32}, b_{33}.

Supposons cette opération faite; l'équation (42) prendra la forme plus simple

$$(45) \qquad \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{21} \end{vmatrix} = 0.$$

On pourra déterminer deux constantes m_1, m_2, telles que l'on ait

$$(46) \qquad m_1(b_{11}z_1 + b_{12}z_2) + m_2(b_{21}z_1 + b_{22})z_2 = 0,$$

et si l'on prend pour nouvelle variable $m_1y_1 + m_2y_2$, on fera disparaître de $\mathfrak{T}$ les coefficients b_{21}, b_{22}. Cela fait, l'équation (41) se réduira à $b_{11} = 0$. On voit donc qu'on peut supposer

$$(47) \qquad b_{11} = b_{21} = b_{22} = b_{31} = b_{32} = b_{33} = 0.$$

XXXV. Nous allons montrer en outre que si l'un des coefficients b_{12}, b_{23} est nul, on peut admettre que l'autre l'est également.

Soit d'abord $b_{12} = 0$. On pourra déterminer deux entiers l_1, l_2 tels qu'on ait $l_1b_{13} + l_2b_{23} = 0$. Si $b_{13} >$ ou < 0, l_2 ne sera pas nul, et l'on pourra prendre pour variables indépendantes, au lieu de y_2, z_2, les suivantes $l_1y_1 + l_2y_2$, $l_1z_1 + l_2z_2$, ce qui n'altérera pas l'expression de $\mathfrak{A}$, et transformera $\mathfrak{T}$ en une expression analogue, mais où le coefficient analogue à b_{23} aura disparu. Si $b_{23} = 0$, on arrivera au même résultat en permutant les variables y_1, z_1 avec les variables y_2, z_2.

Soit en second lieu $b_{23} = 0$. Si $b_{13} >$ ou < 0, on fera disparaître le coefficient analogue à b_{12} en prenant pour nouvelles variables $b_{12}y_2 + b_{13}y_3$, $b_{12}z_2 + b_{13}z_3$ à la place de y_3, z_3. Si b_{13} était nul, on obtiendrait le même résultat en permutant y_2, z_2 avec y_3, z_3.

XXXVI. Soit maintenant

$$(48) \qquad \mathfrak{U} = \begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_\rho \quad a'_{\rho 1}y_1 + \ldots + a'_{\rho 4}y_4 + b'_{\rho 1}z_1 + \ldots + b'_{\rho 3}z_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_\rho \quad c'_{\rho 1}y_1 + \ldots + c'_{\rho 4}y_4 + d'_{\rho 1}z_1 + \ldots + d'_{\rho 3}z_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix}$$

une substitution quelconque du groupe $\mathfrak{G}$.

La substitution $\mathfrak{T}\mathfrak{A}^\mu\mathfrak{U}$, où μ est un entier indéterminé, sera de la forme

$$(49) \qquad \mathfrak{V} = \begin{vmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_\rho \quad a''_{\rho 1}y_1 + \ldots + a''_{\rho 4}y_4 + b''_{\rho 1}z_1 + \ldots + b''_{\rho 3}z_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_\rho \quad c''_{\rho 1}y_1 + \ldots + c''_{\rho 1}y_1 + d''_{\rho 4}z_4 + \ldots + d''_{\rho 3}z_3 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{vmatrix},$$

en posant pour abréger

$$(50)\qquad b''_{\rho\sigma} = (a'_{\rho1} + b'_{\rho1}\mu)b_{1\sigma} + (a'_{\rho2} + b'_{\rho2}\mu)b_{2\sigma} + (a'_{\rho3} + b_{\rho3}\mu)b_{3\sigma} + a'_{\rho4}b_{4\sigma} + b'_{\rho1}d_{1\sigma} + b'_{\rho2}d_{2\sigma} + b'_{\rho3}d_{3\sigma},$$

et de même pour les autres coefficients.

Les coefficients $b''_{11}, \ldots, b''_{33}$ doivent satisfaire, quel que soit μ, aux équations (41), (42), (43). On aura donc en particulier

$$(51)\qquad b''_{11} + b''_{22} + b''_{33} = 0.$$

Substituons dans cette équation les valeurs de $b''_{11}, b''_{22}, b''_{33}$, et égalons séparément à zéro les termes qui multiplient μ; il viendra, en tenant compte des équations (47),

$$(52)\qquad b'_{21}b_{12} + b'_{31}b_{13} + b'_{32}b_{23} = 0.$$

XXXVII. Cette équation doit être satisfaite quelle que soit la substitution $\mathcal{U}$ que l'on considère dans le groupe $\mathcal{G}$. Donc elle aura encore lieu en remplaçant les coefficients $b'_{21}, b'_{31}, b'_{32}$ de $\mathcal{U}$ par les coefficients correspondants de $\mathcal{V}$. On aura donc, quel que soit μ,

$$(53)\qquad b''_{21}b_{12} + b''_{31}b_{13} + b''_{32}b_{23} = 0.$$

Remplaçons dans cette équation $b''_{21}, b''_{31}, b''_{32}$ par leurs valeurs, et égalons séparément à zéro les termes multipliés par μ. Il viendra, en tenant compte des équations (47),

$$(54)\qquad b_{12}b_{23}b'_{31} = 0.$$

XXXVIII. On peut satisfaire à cette équation: 1° en posant

$$(55)\qquad b'_{31} = 0;$$

2° en posant $b_{12}\,b_{23} = 0$, d'où l'on déduira (35)

$$(56)\qquad b_{12} = 0,\ b_{23} = 0,$$

puis, en vertu de l'équation (52),

$$(57)\qquad b_{13} = 0.$$

XXXIX. Il est maintenant aisé de voir que $\mathcal{G}$ *ne peut être primaire.*

En effet, supposons d'abord qu'on puisse choisir $\mathcal{U}$ de telle sorte que l'on ait $b'_{31} >$ ou < 0. On aura les équations (47), (56) et (57), desquelles il résulte que $\mathfrak{T}$ remplace y_1, y_2, y_3 par des fonctions de y_1, y_2, y_3, y_4 seulement; $\mathfrak{T}$ désignant d'ailleurs une substitution *quelconque* du groupe $\mathcal{G}$.

Cela posé, soient $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}', \ldots$ les diverses substitutions de ce groupe; Y, Y', ...

les fonctions qu'elles font succéder à y_1. Chacune de ces fonctions ne dépendra que des variables y_1, y_2, y_3, y_4. Donc, le faisceau formé par les fonctions linéaires de la forme $\alpha Y + \alpha' Y' + \ldots$ contiendra un nombre de fonctions linéairement distinctes au plus égal à 4. Soient $Y_1, \ldots, Y_k$ ces fonctions.

D'autre part, chacune des substitutions de $\mathcal{G}$ transforme les unes dans les autres les fonctions $Y, Y', \ldots$; car supposons que l'une d'elles $\mathfrak{T}_1$ transforme Y en Y_1; soit $\mathfrak{T}$ la substitution qui transforme y_1 en Y; Y_1 étant la transformée de y_1 par $\mathfrak{T}\,\mathfrak{T}_1$ appartiendra à la suite $Y, Y', \ldots$.

Donc les substitutions de $\mathcal{G}$ transformeront les unes dans les autres les fonctions du faisceau $\alpha Y + \alpha' Y' + \ldots$. Le nombre des fonctions distinctes $Y_1, \ldots, Y_k$ contenues dans ce faisceau, étant inférieur à celui des variables, $\mathcal{G}$ ne sera pas primaire; et si l'on prend pour variables indépendantes les fonctions $Y_1, \ldots, Y_k$, avec d'autres fonctions quelconques $Y_{k+1}, \ldots$, les substitutions de $\mathcal{G}$ seront de la forme générale

$$(58)\qquad \begin{vmatrix} Y_1, \ldots, Y_k & \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_k Y_k, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_k Y_k \\ Y_{k+1}, \ldots & Y_1 Y_1 + \ldots + Y_k Y_k + Y_{k+1} Y_{k+1} + \ldots, \ldots \end{vmatrix}.$$

Supposons maintenant que l'on ait $b'_{31} = 0$ quel que soit $\mathfrak{A}$; on arrivera à la même conséquence. En effet, soient $Y, Y', \ldots$ les fonctions que les substitutions de $\mathcal{G}$ font succéder à y_3; aucune d'elles ne contiendra z_3. Donc le faisceau formé par les fonctions $Y, Y', \ldots$ contiendra un nombre de fonctions distinctes $Y_1, \ldots, Y_k$ inférieur d'une unité au moins au nombre total des variables $y_1, \ldots, y_4, z_1, \ldots, z_3$. Cela posé, on achèvera le raisonnement comme dans l'autre hypothèse.

XL. Supposons donc les substitutions de $\mathcal{G}$ ramenées à la forme (58). Le premier membre de l'équation caractéristique d'une substitution de cette forme est évidemment divisible par celui de l'équation caractéristique de la substitution à k variables

$$(59)\qquad | Y_1, \ldots, Y_k \quad \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_k Y_k, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_k Y_k |.$$

Mais, par hypothèse, toutes les substitutions de $\mathcal{G}$ ont pour premier membre de leur équation caractéristique une puissance de $s - 1$. Donc il en doit être de même des substitutions partielles (59); donc le groupe $\mathcal{G}_k$ formé par ces substitutions ne sera pas primaire si $k > 1$; et ses substitutions pourront se mettre par un choix convenable des variables indépendantes sous la forme

$$(60)\qquad \begin{vmatrix} Y_1, \ldots, Y_l & \varphi_1(Y_1, \ldots, Y_l), \ldots, \varphi_l(Y_1, \ldots, Y_l) \\ Y_{l+1}, \ldots, Y_k & \varphi_{l+1}(Y_1, \ldots, Y_k), \ldots, \varphi_k(Y_1, \ldots, Y_k) \end{vmatrix},$$

l étant $< k$.

Si $l > 1$, on pourra de même choisir les variables $Y_1, \ldots, Y_l$, de manière à mettre les substitutions partielles

$$(61) \qquad | Y_1, \ldots, Y_l \quad \varphi_1(Y_1, \ldots, Y_l), \ldots, \varphi_l(Y_1, \ldots, Y_l) |$$

sous la forme plus simple

$$(62) \qquad \left| \begin{array}{ll} Y_1, \ldots, Y_m & \psi_1(Y_1, \ldots, Y_m), \ldots, \psi_m(Y_1, \ldots, Y_m) \\ Y_{m+1}, \ldots, Y_l & \psi_{m+1}(Y_1, \ldots, Y_l), \ldots, \psi_l(Y_1, \ldots, Y_l) \end{array} \right|$$

Continuant ainsi, on voit que l'on pourra choisir les variables indépendantes de telle sorte que la première de ces variables, Y_1, soit multipliée par un simple facteur constant dans chacune des substitutions de $\mathcal{G}$. D'ailleurs, ce facteur constant doit se réduire à l'unité; car, s'il était égal à α dans une des substitutions de $\mathcal{G}$, le premier membre de l'équation caractéristique de cette substitution serait divisible par $s - \alpha$; or, il se réduit à une puissance de $s - 1$, par hypothèse. Donc $\alpha = 1$.

Nous avons donc ce théorème :

Si toutes les substitutions de $\mathcal{G}$ ont pour équation caractéristique $(s-1)^n = 0$, il existe une fonction au moins des variables $y_1, \ldots, y_n$ qui n'est altérée par aucune substitution de $\mathcal{G}$.

XLI. Il peut d'ailleurs exister plusieurs semblables fonctions. Supposons qu'il en existe p distinctes. On pourra, en les prenant pour variables indépendantes, mettre les substitutions de $\mathcal{G}$ sous la forme

$$(63) \qquad \left| \begin{array}{ll} Y_1, \ldots, Y_p & Y_1, \ldots, Y_p \\ Y_{p+1}, \ldots, Y_n & \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_n Y_n, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_n Y_n \end{array} \right|.$$

Or, le premier membre de l'équation caractéristique d'une semblable substitution est égal au produit de $(s-1)^p$ par le premier membre de l'équation caractéristique de la substitution

$$(64) \qquad | Y_{p+1}, \ldots, Y_n \quad \alpha_{p+1} Y_{p+1} + \ldots + \alpha_n Y_n, \ldots, \beta_{p+1} Y_1 + \ldots + \beta_n Y_n |.$$

Donc les substitutions de cette forme, correspondantes aux diverses substitutions de $\mathcal{G}$, auront toutes pour équation caractéristique $(s-1)^{n-p} = 0$.

On en conclut qu'on pourra choisir les variables de manière à les mettre sous la forme

$$(65) \qquad \left| \begin{array}{ll} Y_{p+1}, \ldots, Y_{p+q} & Y_{p+1}, \ldots, Y_{p+q} \\ Y_{p+q+1}, \ldots, Y_n & \alpha'_{p+1} Y_{p+1} + \ldots + \alpha'_n Y_n, \ldots, \beta'_{p+1} Y_{p+1} + \ldots + \beta'_n Y_n \end{array} \right|.$$

Continuant ainsi, on voit que *les substitutions de $\mathfrak{G}$ pourront se mettre sous la forme générale*

$$(66)\qquad \left|\begin{matrix} Y_1, \ldots, Y_p & Y_1, \ldots, Y_p \\ Y_{p+1}, \ldots, Y_q & Y_{p+1}+f_{p+1}, \ldots, Y_q+f_q \\ Y_{q+1}, \ldots, Y_r & Y_{q+1}+f_{q+1}, \ldots Y_r+f_r \\ \ldots & \ldots \end{matrix}\right|,$$

où $f_{p+1}, \ldots, f_q$ sont des fonctions de $Y_1, \ldots, Y_p$; $f_{q+1}, \ldots, f_r$ des fonctions de $Y_1, \ldots, Y_q$, etc.

En particulier, les substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ dont $\mathfrak{G}$ est dérivé, seront de cette forme. Cela est d'ailleurs suffisant, car le produit de deux substitutions de la forme (66) est évidemment de cette même forme.

XLII. Rien n'est maintenant plus simple que de vérifier si les substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ sont ou non susceptibles d'être réduites à la forme (66). On cherchera, par la méthode des coefficients indéterminés, s'il existe ou non des fonctions des variables initiales $y_1, \ldots, y_n$ qui ne soient altérées par aucunes des substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$. On aura, pour déterminer les coefficients d'une semblable fonction, des équations linéaires homogènes, en nombre surabondant. Si ces équations peuvent néanmoins être satisfaites, soit p le nombre des coefficients inconnus qui restent arbitraires; on aura p fonctions distinctes $Y_1, \ldots, Y_p$ jouissant de la propriété cherchée. On cherchera ensuite s'il existe des fonctions $Y_1, \ldots, Y_q$ que $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ accroissent simplement de fonctions linéaires $Y_1, \ldots, Y_p$: ce qui conduira à résoudre un autre système d'équations du premier degré, et ainsi de suite. Si l'on ne se heurte chemin faisant à aucun système d'équations incompatible, il suffira de prendre pour variables $Y_1, \ldots, Y_p, Y_{p+1}, \ldots, Y_q, \ldots$ pour ramener $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ et par suite les autres substitutions de $\mathfrak{G}$ à la forme (66). Quant aux substitutions correspondantes $A = a\mathcal{A}$, $B = b\mathcal{B}, \ldots$ du groupe G, elles se déduiront de $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ en multipliant toutes les fonctions qui forment le second nombre de leurs expressions par a, par $b, \ldots$.

Chacune des substitutions de G multipliera donc par un simple facteur constant chacune des variables $Y_1, \ldots, Y_p$. On aura déterminé, par suite, de p manières différentes, un système d'une seule fonction que les substitutions de G remplacent par des fonctions linéaires de cette même fonction; ce qui résout le problème que nous nous étions proposé.

XLIII. Supposons maintenant qu'en suivant la marche indiquée au n° XLII nous ayons abouti à une impossibilité; ce qui indiquera que $\mathfrak{G}$ contient une substitution, dont l'équation caractéristique a plusieurs racines distinctes. Pour résoudre le problème dans ce dernier cas, on opérera comme il suit:

Prenons, comme précédemment, pour variables indépendantes, celles qui ramènent $\mathcal{A}$ à sa forme canonique, et supposons, pour fixer les idées, que cette forme canonique soit celle que donne la formule (36). Nous déterminerons ensuite les transformées de la fonction y_1 par les substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, Si, parmi ces transformées, il en existe qui s'expriment linéairement en fonction des autres et de y_1, on les effacera : soient $y'_1, \ldots, y^r_1$ celles qui restent. En les transformant par $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, on obtiendra de nouvelles fonctions, parmi lesquelles on effacera toutes celles qui s'expriment linéairement en fonction des autres et des fonctions $y_1, y'_1, \ldots, y^r_1$. S'il en reste encore quelques-unes $y^{r+1}_1, \ldots, y^s_1$, on les transformera par $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on n'obtienne plus de fonctions nouvelles, ce qui arrivera nécessairement, car le nombre total des fonctions distinctes que l'on peut obtenir ne saurait dépasser le nombre des variables $y_1, \ldots, y_4$.

Les fonctions $y_1, y'_1, \ldots$ ainsi obtenues jouiront évidemment de la propriété que les substitutions $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$ (et par suite toutes les substitutions de $\mathcal{G}$) remplacent chacune d'elles par une fonction linéaire de $y_1, y'_1, \ldots$. Cela posé, deux cas pourront se présenter.

XLIV. 1° Si aucune de ces fonctions ne contient les variables z_1, z_2, z_3, leur nombre sera au plus égal à celui des variables y_1, y_2, y_3, y_4; et, sans aller plus loin, on aura obtenu un système de moins de n fonctions tel, que les substitutions de $\mathcal{G}$, et par suite celles de G qui n'en diffèrent que par des facteurs constants, les remplacent par des fonctions linéaires les unes des autres. Le faisceau Ψ dérivé de ces fonctions satisfera à notre problème.

XLV. 2° Si, parmi les fonctions $y_1, y'_1, \ldots$ il en est une y^ρ_1 qui contienne z_1, z_2, z_3, on arrêtera la série des opérations précédentes au moment où l'on arrivera à y^ρ_1 ; et, en repassant la suite des transformations par laquelle on a passé de y_1 à y^ρ_1, on déterminera aisément la substitution $\mathcal{C}$ qui transforme y_1 en y^ρ_1. Cette substitution sera de la forme (37), et les coefficients $b_{11}, \ldots, b_{33}$ satisferont ou non aux équations (41), (42), (43).

S'ils n'y satisfont pas, on pourra déterminer une substitution de la forme $\mathcal{A}^\lambda \mathcal{C}$ dont l'équation caractéristique ait plusieurs racines distinctes. Pour cela, on développera le déterminant (39), qui forme le premier membre de l'équation caractéristique de $\mathcal{A}^\lambda \mathcal{C}$; soit

$$\Delta = s^n + \varphi s^{n-1} + \varphi_1 s^{n-} + \ldots = 0$$

ce déterminant. On n'aura qu'à assigner à λ une valeur qui ne satisfasse pas aux équations (35). On y arrivera par une suite d'essais en nombre au plus égal à $n\tau$, τ étant le degré en λ de l'un des coefficients $\varphi, \varphi_1, \ldots$. On pourra alors traiter le problème comme il est indiqué au n° XXVII.

XLVI. Si les équations (41), (42), (43) sont satisfaites, on pourra choisir les variables indépendantes de telle sorte que les équations (47) le soient (XXXIII-XXXIV). Si en outre on a $b_{12} b_{23} = 0$, on pourra faire en sorte que b_{12} et b_{23} soient nuls séparément (XXXV). Mais b_{13} sera différent de 0.

XLVII. Cela posé, déterminons les transformées de y_3 par les substitutions $\mathcal{A},\mathcal{B},\ldots$. Effaçons celles de ces transformées, s'il y en a, qui s'expriment linéairement en fonction des autres et de y_3. Transformons de nouveau celles qui restent par $\mathcal{A},\mathcal{B},\ldots$, et ainsi de suite. Nous obtiendrons une suite nécessairement limitée de fonctions distinctes $y_3, y_3', \ldots$, que les substitutions de G transformeront en fonctions linéaires de $y_3, y_3', \ldots$.

Si aucune des fonctions $y_3, y_3', \ldots$ ne contient la variable z_1, leur nombre sera au plus égal à $n-1$, puisqu'elles ne dépendent que des $n-1$ variables autres que z_1; et l'on aura ainsi un système de moins de n fonctions, que les substitutions de G remplacent par des fonctions linéaires de ces mêmes fonctions. Le problème se trouve ainsi résolu.

XLVIII. Supposons au contraire que l'une de ces fonctions, y_3^σ, contienne la variable z_1. La substitution $\mathcal{U}$, qui remplace y_3 par y_3^σ, sera de la forme (48), et le coefficient b_{31}' y sera différent de 0. Par suite, les équations (52) et (54) ne pourrront être satisfaites à la fois (XXXVIII).

Si $\mathcal{U}$ ne satisfait pas à l'équation (52), la substitution $\mathcal{V} = \mathcal{C}\mathcal{A}^\mu\mathcal{U}$ aura la forme (49), et l'on pourra déterminer μ de telle sorte que l'équation (51) ne soit pas satisfaite (XXXVI). On pourra ensuite déterminer λ de telle sorte que la substitution $\mathcal{A}^\lambda\mathcal{V}$ ait une équation caractéristique autre que $(s-1)^n = 0$.

Si c'est l'équation (54) qui n'est pas satisfaite, on déterminera μ de telle sorte que $\mathcal{V}$ ne satisfasse pas à l'équation (53), analogue à (52). On raisonnera ensuite sur $\mathcal{V}$ comme on vient de le faire sur $\mathcal{U}$ dans le cas précédent.

IV

XLIX. Nous avons vu, dans ce qui précède, comment on peut reconnaître si le groupe G est primaire; et, s'il ne l'est pas, comment on peut choisir ses variables de manière à mettre ses subsitutions sous la forme

$$(67)\qquad \left|\begin{array}{ll} Y_1,\ldots,Y_k & \varphi_1(Y_1,\ldots,Y_k),\ \ldots,\varphi_k(Y_1,\ldots,Y_k) \\ Y_{k+1},\ldots,Y_n & \varphi_{\rho+1}(Y_1,\ldots,Y_n),\ldots,\varphi_n(Y_1,\ldots,Y_n) \end{array}\right|.$$

Si le groupe formé par ces substitutions partielles

$$(68)\qquad |\ Y_1,\ldots,Y_k\quad \varphi_1(Y_1,\ldots,Y_k),\ldots,\varphi_k(Y_1,\ldots,Y_k)\ |$$

n'est pas primaire, on pourra choisir les variables de manière à mettre ces substitutions sous la forme

$$(69)\qquad \left|\begin{array}{ll} Y_1,\ldots,Y_l & \psi_1(Y_1,\ldots,Y_l),\ldots,\psi_l(Y_1,\ldots,Y_l) \\ Y_{l+1},\ldots,Y_k & \psi_{l+1}(Y_1,\ldots,Y_k),\ldots,\psi_k(Y_1,\ldots,Y_k) \end{array}\right|.$$

Si le groupe formé par les substitutions partielles

$$(70)\qquad |\ Y_1, \ldots, Y_l \quad \psi_1(Y_1, \ldots, Y_l), \ldots, \psi_l(Y_1, \ldots, Y_l)\ |.$$

n'était pas primaire, on pourrait simplifier d'une manière analogue l'expression de ces substitutions. Continuant ainsi, on voit qu'on pourra mettre les substitutions de G sous la forme

$$(71)\qquad \left|\begin{array}{ll} Y_1, \ldots, Y_m & \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_m Y_m, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_m Y_m \\ Y_{m+1}, \ldots, Y_n & \gamma_1 Y_1 + \ldots + \gamma_n Y_n, \ldots, \delta_1 Y_1 + \ldots + \delta_n Y_n \end{array}\right|,$$

le groupe formé par les substitutions partielles

$$(72)\qquad |\ Y_1, \ldots, Y_m \quad \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_m Y_m, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_m Y_m\ |$$

étant primaire.

L. Cela posé, si le groupe formé par les substitutions

$$(73)\qquad |\ Y_{m+1}, \ldots, Y_n \quad \gamma_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \gamma_n Y_n, \ldots, \delta_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \delta_n Y_n\ |$$

n'est pas primaire, on pourra choisir les variables $Y_{m+1}, \ldots, Y_n$ de manière à mettre ces substitutions sous la forme

$$(74)\qquad \left|\begin{array}{ll} Y_{m+1}, \ldots, Y_{m'} & \alpha'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \alpha'_{m'} Y_{m'}, \ldots, \beta'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \beta'_{m'} Y_{m'} \\ Y_{m'+1}, \ldots, Y_n & \gamma'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \gamma'_n Y_n, \ldots, \delta'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \delta'_n Y_n \end{array}\right|,$$

les substitutions partielles

$$(75)\qquad |\ Y_{m+1}, \ldots, Y_{m'} \quad \alpha'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \alpha'_{m'} Y_{m'}, \ldots, \beta'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \beta'_{m'} Y_{m'}\ |$$

formant un groupe primaire.

Les substitutions de G prendront alors la forme

$$\left|\begin{array}{ll} Y_1, \ldots, Y_m & \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_m Y_m, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_m Y_m \\ Y_{m+1}, \ldots, Y_{m'} & \alpha'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \alpha'_{m'} Y_{m'} + f_{m+1}(Y_1, \ldots, Y_m), \ldots, \\ & \qquad \beta'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \beta'_{m'} Y_{m'} + f_{m'}(Y_1, \ldots, Y_m) \\ Y_{m'+1}, \ldots, Y_n & \varphi_{m'+1}(Y_1, \ldots, Y_n), \ldots, \varphi_n(Y_1, \ldots, Y_n) \end{array}\right|.$$

Continuant ainsi, on voit qu'on pourra mettre les substitutions de G sous la forme

$$(76)\qquad \left|\begin{array}{ll} Y_1, \ldots, Y_m & \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_m Y_m, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_m Y_m \\ Y_{m+1}, \ldots, Y_{m'} & \alpha'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \alpha'_{m'} Y_{m'} + f_{m+1}(Y_1, \ldots, Y_m), \ldots, \\ & \qquad \beta'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \beta'_{m'} Y_{m'} + f_{m'}(Y_1, \ldots, Y_m) \\ Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''} & \alpha''_{m'+1} Y_{m'+1} + \ldots + \alpha''_{m''} Y_{m''} + f_{m'+1}(Y_1, \ldots, Y_{m'}), \ldots, \\ & \qquad \beta''_{m'+1} Y_{m'+1} + \ldots + \beta''_{m''} Y_{m''} + f_{m''}(Y_1, \ldots, Y_{m'}) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right|,$$

les substitutions partielles

$$(77)\qquad |\, Y_1, \ldots, Y_m \quad \alpha_1 Y_1 + \ldots + \alpha_m Y_m, \ldots, \beta_1 Y_1 + \ldots + \beta_m Y_m \,|$$

$$(78)\ |\, Y_{m+1}, \ldots, Y_{m'} \quad \alpha'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \alpha'_{m'} Y_{m'}, \ldots, \beta'_{m+1} Y_{m+1} + \ldots + \beta'_{m'} Y_{m'} \,|$$

formant autant de groupes primitifs.

LI. Voyons maintenant comment on pourra déterminer tous les faisceaux tels, que les substitutions de G transforment leurs fonctions les unes dans les autres.

Soit F un semblable faisceau. Nous dirons qu'il est de la première classe, si les fonctions qui le composent ne dépendent que des variables $Y_1, \ldots, Y_m$; de la seconde classe, si quelques-unes de ces fonctions dépendent des variables $Y_{m+1}, \ldots, Y_{m'}$, sans qu'aucune d'elles dépende des variables suivantes; et ainsi de suite.

Le groupe formé par les substitutions (77) étant primaire, par hypothèse, il n'existera évidemment qu'un seul faisceau de première classe, lequel sera formé de toutes les combinaisons linéaires des variables $Y_1, \ldots, Y_m$.

Nous allons donner d'autre part un moyen de déterminer les faisceaux de la classe k, lorsqu'on connaîtra les faisceaux des classes inférieures à k. Connaissant le seul faisceau qui entre dans la première classe, on pourra s'élever ainsi progressivement à la connaissance de tous les faisceaux possibles.

LII. Soit pour fixer les idées $k = 3$. Désignons par $F, F', \ldots$ les divers faisceaux de première et de seconde classe, par Φ l'un des faisceaux inconnus de la troisième classe. Les diverses fonctions de Φ seront de la forme $P + Q$, $P_1 + Q_1, \ldots$, en désignant par $P, P_1, \ldots$ des fonctions de $Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''}$ et par $Q, Q_1, \ldots$ des fonctions de $Y_1, \ldots, Y_{m'}$. D'ailleurs les substitutions de G, que nous avons mises sous la forme (76), transforment les unes dans les autres les fonctions $P + Q, P_1 + Q_1, \ldots$. Il faudra évidemment pour cela que les substitutions

$$|\, Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''} \quad \alpha''_{m'+1} Y_{m'+1} + \ldots + \alpha''_{m''} Y_{m''}, \ldots, \beta''_{m'+1} Y_{m'+1} + \ldots + \beta''_{m''} Y_{m''} \,|$$

transforment les unes dans les autres les fonctions partielles $P, P_1, \ldots$. Mais, par hypothèse, ces substitutions forment un groupe primaire Γ; donc le faisceau formé par les fonctions $P, P_1, \ldots$ contiendra toutes les fonctions linéaires des variables $Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''}$. En particulier, il contiendra $Y_{m'+1}$. Par suite, Φ contiendra une fonction de la forme

$$f = Y_{m'+1} + Q = Y_{m'+1} + \lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_{m'} Y_{m'}.$$

LIII. Formons les transformées $f', \ldots$ de la fonction f par les substitutions $A, B, \ldots$, en considérant $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m'}$ comme des indéterminées. Si, parmi ces transformées, il en est qui s'expriment linéairement en fonction des autres et de f, nous les supprimerons. Soient $f', \ldots, f^r$ celles qui restent. Transformons-les par A,B,... et supprimons encore celles de ces transformées qui s'expriment linéairement en fonction des autres et de $f, f', \ldots, f^r$. Soient $f^{r+1}, \ldots, f^s$ celles qui restent; nous les transformerons encore par A,B,... et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on n'obtienne plus de nouvelles transformées, linéairement distinctes des précédentes. Cela arrivera forcément, car les transformées successivement obtenues, dépendant linéairement de $Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''}$ et des m'^2 produits $\lambda_1 Y_1, \lambda_1 Y_2, \ldots, \lambda_{m'} Y_{m'}$, il ne peut y en avoir plus de $m'' - m' + m'^2$ qui soient linéairement distinctes.

Soient $f, \ldots, f^t$ les fonctions ainsi obtenues. En les combinant linéairement, on obtiendra un faisceau de fonctions, que les substitutions de G transforment les unes dans les autres. Ces fonctions sont respectivement de la forme $P+Q, P'+Q', \ldots, P^t+Q^t$, $P, P', \ldots, P^t$ étant des fonctions de $Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''}$ et $Q, Q', \ldots, Q^t$ des fonctions de $Y_1, \ldots, Y_{m'}$. D'ailleurs les substitutions de Γ permuteront évidemment les unes dans les autres les fonctions du faisceau formé par la combinaison linéaire des fonctions partielles $P, P', \ldots, P^t$. Mais Γ est primaire, par hypothèse; donc, parmi les fonctions $P, P', \ldots, P^t$, toutes formées avec les $m'' - m'$ variables $Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''}$, il y en aura $m'' - m'$ de distinctes.

LIV. Supposons, par exemple, que $P, P', \ldots, P^{m''-m'-1}$ soient distinctes. Soit $\varphi = \mathfrak{P} + \mathfrak{Q}$ une quelconque des fonctions du faisceau Φ. La fonction $\mathfrak{P}$ des indices $Y_{m'+1}, \ldots, Y_{m''}$ pourra s'exprimer linéairement en fonction des $m'' - m'$ fonctions distinctes $P, \ldots, P^{m''-m'-1}$. Soit, par exemple,

$$\mathfrak{P} = dP + \ldots + d^{m''-m'-1} P^{m''-m'-1}.$$

On aura évidemment

$$\varphi = df + \ldots + d^{m''-m'-1} f^{m''-m'-1} + \mathfrak{Q}_1,$$

$\mathfrak{Q}_1$ ne dépendant plus que des variables $Y_1, \ldots, Y_{m'}$. Donc Φ s'obtiendra en combinant les $m'' - m'$ fonctions $P, \ldots, P^{m''-m'-1}$ avec des fonctions $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$ des seuls indices $Y_1, \ldots, Y_{m'}$.

LV. Il peut se faire que $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$ se réduisent toutes à zéro. Dans le cas contraire, elles formeront un faisceau de fonctions que les substitutions de G permuteront évidemment les unes dans les autres. Ce sera donc un des faisceaux F,F',... déjà déterminés.

LVI. Parmi ces fonctions $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$, il en est qu'il est aisé de déterminer. Ce sont celles qui appartiennent au faisceau dérivé de $f, \ldots, f^t$, lequel est évidemment contenu dans Φ. Pour les obtenir, on remarquera que les fonctions $f^{m''-m'}, \ldots, f^t$ se réduiront respectivement, par la soustraction de fonctions linéaires convenables de $f, \ldots, f^{m''-m-1}$, à des fonctions $\mathfrak{Q}^{m''-m'}, \ldots, \mathfrak{Q}^t$ des seules variables $Y_1, \ldots, Y_{m'}$. D'ailleurs les coefficients des variables dans ces fonctions seront évidemment linéaires par rapport à $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m'}$.

LVII. Si l'on veut que $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$ se réduisent à zéro, il faudra *a fortiori* que les fonctions $\mathfrak{Q}^{m''-m'}, \ldots, \mathfrak{Q}^t$ qui font partie de cette suite s'annulent. Il faudra pour cela que les coefficients de $Y_1, \ldots, Y_m$ s'annulent tous dans chacune de ces fonctions, ce qui donnera pour $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m'}$ un système d'équations linéaires, en général surabondant. Si ces équations ne sont pas incompatibles, à chaque système de valeurs qui y satisfait, correspondra un faisceau Φ, dérivé des seules fonctions $f, \ldots, f^{m''-m'-1}$.

LVIII. Si l'on veut que $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \ldots$ forment par leur réunion l'un des faisceaux $F, F', \ldots$ déjà trouvés, par exemple le faisceau F, il faudra que $\mathfrak{Q}^{m''-m'}, \ldots, \mathfrak{Q}^t$ appartiennent à ce faisceau. Or, soient $\chi, \chi', \ldots$ les fonctions distinctes que contient le faisceau F ; les diverses fonctions de F seront de la forme $\mu\chi + \mu'\chi' + \ldots$; et l'on aura à satisfaire aux conditions

$$\mathfrak{Q}^{m''-m'} = \mu\chi + \mu'\chi' + \ldots, \quad \mathfrak{Q}^{m''-m'+1} = \mu_1\chi + \mu_1'\chi' + \ldots, \ldots$$

Remplaçant dans ces équations $\mathfrak{Q}^{m''-m'}, \ldots, \mathfrak{Q}^t, \chi, \chi', \ldots$ par leurs valeurs en $Y_1, \ldots, Y_m$ et égalant séparément à zéro les coefficients de chaque variable, on aura pour déterminer $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m'}, \mu, \mu', \ldots, \mu_1, \mu_1', \ldots, \ldots$ un système d'équations linéaires. Si ces équations sont incompatibles, il n'existera aucun faisceau Φ de troisième classe et contenant F. Sinon, à chaque système de solutions correspondra un faisceau Φ.

On remarquera cependant que si, dans l'expression

$$f = Y_{m'+1} + \lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_{m'} Y_{m'},$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ont reçu un système de valeurs permettant de déterminer un faisceau Φ qui contienne F, on obtiendra une infinité de systèmes de valeurs qui engendrent le même faisceau, en considérant les fonctions de la forme

$$f + \nu\chi + \nu'\chi' + \ldots,$$

où ν, ν' sont des constantes quelconques.