BULLETIN DE LA S. M. F.

LAGUERRE

Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 31-39

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__31_1>

Sur l'application de la théorie des formes binaires à la géométrie des courbes tracées sur une surface du second ordre; par M. LAGUERRE.

(Séance du 18 décembre 1872)

6

I. — CONSIDÉRATIONS PRÉLIMINAIRES.

1. Bien que les considérations suivantes puissent être appliquées à toutes les surfaces algébriques, et en particulier au plan (*), je ne les développerai, dans ce mémoire, que relativement aux courbes que l'on peut tracer sur une surface du second ordre.

Soit S une surface du second ordre, elle possède deux systèmes de génératrices rectilignes; avec M. Chasles (*Théorie des courbes tracées sur l'hyperboloïde à une nappe*, Comptes rendus, 1861), j'appellerai directrices les droites de l'un de ces systèmes, en réservant le nom de génératrices aux droites de l'autre système.

Prenons arbitrairement sur S une conique K que je désignerai sous le nom de conique fondamentale; cette courbe est *unicursale*, c'est-à-dire qu'on peut désigner chacun de ses points par la valeur d'un paramètre t et de telle sorte qu'à chaque valeur du paramètre corresponde un point unique de la courbe.

Soit M un point de la surface S; par ce point passe une directrice de la surface coupant K en un point unique, dont je désignerai le paramètre par x; par ce même point passe une génératrice de la surface coupant K en un point unique, dont je désignerai le paramètre par y. Il est clair, du reste, que le point M est complétement déterminé et sans ambiguïté par les deux quantités x et y; je les appellerai les coordonnées du point M.

L'équation d'une courbe tracée sur S sera de la forme $f(x, y) = 0$; son degré p, relativement à la variable x, indiquant en combien de points elle est coupée par une génératrice quelconque, et son degré q, relativement à la variable y, indiquant en combien de points elle est coupée par une directrice. (Voy. CHASLES, *loc. cit.*)

2. On connaît le procédé ingénieux employé par Plücker pour rendre homogène l'équation $f(x, y) = 0$, en remplaçant les variables x et y par

(*) Le cas du plan présente naturellement un très-grand intérêt, mais demande pour l'application de la théorie quelques explications dans lesquelles je n'ai pas voulu entrer ici.

$\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$; nous emploierons ici un procédé analogue en remplaçant x par $\frac{x}{x'}$ et y par $\frac{y}{y'}$. De cette façon, l'équation d'une courbe algébrique tracée sur S deviendra

$$F(x, x'; y, y') = 0,$$

le polynôme F étant homogène et du degré p par rapport aux deux variables x et x', homogène et du degré q par rapport aux variables y et y'.

3. Cela posé, je rappellerai d'abord ce que l'on nomme *émanant* d'une forme binaire ou d'un polynôme algébrique homogène à deux indéterminées.

Soit $U(x, x')$ un tel polynôme; on appelle émanants de ce polynôme les divers polynômes compris dans les expressions suivantes :

$$y\frac{dU}{dx} + y'\frac{dU}{dx'},$$
$$\frac{1}{2}\left(y^2\frac{d^2U}{dx^2} + 2yy'\frac{d^2U}{dxdx'} + y'^2\frac{d^2U}{dx'^2}\right),$$
$$\frac{1}{2.3}\left(y^3\frac{d^3U}{dx^3} + 3y^2y'\frac{d^3U}{dx^2dx'} + 3yy'^2\frac{d^3U}{dxdx'^2} + y'^3\frac{d^3U}{dx'^3}\right),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

dont la loi est facile à saisir.

Pour abréger, je désignerai ces émanants par la notation $(U)_1$, $(U)_2$, $(U)_3, \ldots$; la parenthèse indiquant un émanant de la forme U, et l'indice qui lui est adjoint l degré de cet émanant par rapport aux lettres y et y'.

Lorsqu'une forme est de degré pair, elle possède un émanant dans lequel les variables x et y entrent au même degré; j'appellerai cet émanant *émanant principal* de la forme, et je le désignerai par la notation (U), en omettant l'indice adjoint à la parenthèse, lorsque cela ne donnera lieu à aucune ambiguïté.

4. Il résulte de ce qui précède que tout émanant d'une forme U se réduit à cette forme lorsque l'on identifie les variables x, x' et y, y'.

Soit U la forme du degré $(p+q)$ à laquelle se réduit le polynôme $F(x, x'; y, y')$ lorsqu'on fait $x' = x$ et $y' = y$; l'expression

$$F(x, x'; y, y') - (U)_q$$

est homogène et du degré p par rapport aux variables x et x', homogène et du degré q par rapport aux variables y et y'; de plus elle s'annule lorsqu'on fait $x = x'$ et $y = y'$, elle est donc divisible par

$$yx' - xy' = \omega,$$

et l'on peut poser

$$F(x, x'; y, y') = (U)_q + \omega F_1(x, x'; y, y'),$$

F_1 désignant un polynôme du degré $p-1$ par rapport aux variables x, x', et du degré $q-1$ par rapport aux variables y, y'.

On peut appliquer au polynôme F_1 le même raisonnement et, en continuant de proche en proche, mettre l'équation d'une courbe, tracée sur la surface du second ordre S, sous la forme suivante :

$$\Phi = (U)_q + \omega(V)_{q-1} + \omega^2(W)_{q-2} + \ldots = 0,$$

où U, V, W,... désignent respectivement des polynômes entiers en x et x', des degrés $p+q$, $p+q-2$, $p+q-4$, ...

5. En particulier si l'on a $p=q$, l'équation de la courbe pourra se mettre sous la forme

$$\Phi = (U) + \omega(V) + \omega^2(W) + \ldots = 0,$$

où U, V et W désignent respectivement des polynômes entiers en x et x', des degrés $2p$, $2(p-1)$, $2(p-2)$; et je ferai observer que, dans ce cas, Φ est homogène et du degré p par rapport aux quantités $x-y$, xy et $x+y$ (*).

6. Par la forme précédente que j'ai donnée à l'équation d'une courbe algébrique, on voit que cette équation s'obtient en égalant à zéro un polynôme Φ, qui est un covariant double des formes U, V, W, ...; on sait en effet que ω est un covariant double de toutes les formes et qu'un émanant quelconque d'une forme est un covariant double de cette forme.

De là résulte que l'étude de cette courbe se rattache intimement à l'étude simultanée de ces formes; je ne veux pas dire par là qu'elle s'y réduise, car, pour étudier complètement une courbe, il est nécessaire de la comparer avec d'autres courbes qui introduisent d'autres formes dans cette étude.

On pourra toujours néanmoins, dans un calcul relatif à un certain nombre de courbes, faire en sorte que l'on n'ait à considérer que des invariants ou des covariants d'un système de formes binaires, et profiter de leurs propriétés connues pour en déduire des propriétés géométriques de ce système de courbes, ou pour simplifier les opérations.

S'il s'agit, par exemple, de calculer un covariant simple, il suffira de calculer son premier terme; s'il s'agit d'un invariant, on pourra le calculer sous sa forme canonique (**).

(*) Ici, pour abréger, je fais, comme je le ferai plus communément, dans la suite de ce mémoire, $x'=y'=1$.

(**) Voir en général, sur cette théorie des formes, l'*Algèbre supérieure* de Salmon (Paris, Gauthier-Villars).

7. Eclaircissons ceci par un exemple. Je ferai auparavant remarquer que, si O désigne le pôle du plan de la conique fondamentale K par rapport à la surface S, les coordonnées d'un point M de cette surface étant x et y, les coordonnées du point M' où le rayon OM perce S sont y et x. De là résulte que si une courbe peut être placée sur un cône ayant pour sommet le point O, son équation doit être symétrique en x et y ; elle doit être par conséquent de la forme.

$$(U) + \omega^2(W) + \ldots = 0,$$

et ne pas contenir les puissances impaires de ω.

En particulier, considérons une biquadratique gauche tracée sur S, c'est-à-dire la courbe du quatrième ordre qui résulte de l'intersection de S par une surface du second ordre n'ayant avec elle aucune génératrice commune. Comme on peut la placer sur quatre cônes différents, son équation pourra, de quatre façons différentes, se mettre sous la forme

$$(U) + k\omega^2 = 0,$$

k désignant une constante et U un polynôme du quatrième degré ; si l'on fait

$$U = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e,$$

l'équation de la courbe sera par conséquent

$$(1)\quad y^2(ax^2 + 2bx + c) + 2y(bx^2 + 2cx + d) + (cx^2 + 2dx + e) + k(y - x)^2 = 0.$$

Pour trouver les génératrices de la surface qui touchent la courbe, il faut chercher pour quelles valeurs de y, x acquiert des racines égales. Ces valeurs seront données par l'équation $F(y) = 0$, où F désigne le discriminant de l'équation précédente pris par rapport à x ; de même, pour une raison de symétrie, les directrices de la surface tangentes à la courbe seront déterminées par l'équation $F(x) = 0$.

Quelle est l'équation générale des biquadratiques tangentes à quatre directrices données et pouvant être placées sur un cône dont le sommet est en O?

Il est clair que, pour résoudre cette question, il faut déterminer de la façon la plus générale le polynôme U et la constante k de telle façon que le discriminant $F(x)$ soit un polynôme donné.

On voit aussi facilement que le problème est identique avec l'intégration de l'équation différentielle d'Euler, qui sert de point de départ à la théorie des fonctions elliptiques. En effet, l'équation (1), étant successivement ordonnée suivant les puissances décroissantes de x et de y, peut se mettre sous les deux formes suivantes :

$$Mx^2 + 2Nx + P = 0 \quad \text{et} \quad M'y^2 + 2N'y + P' = 0,$$

d'où l'on déduit par la différentiation

$$(Mx + N)dx + (M'y + N')dy = 0;$$

évidemment

$$Mx + N = \sqrt{F(x)} \quad \text{et} \quad M'y + N' = \sqrt{F(y)},$$

l'équation devient donc

$$\frac{dx}{\sqrt{F(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{F(y)}};$$

et l'on voit que, pour intégrer cette équation, il faut (ce qui est précisément la méthode de Cauchy) déterminer le polynôme U et la constante k de la façon que j'ai indiquée.

Comme le discriminant $F(x)$ est un covariant de la forme U, il suffit de calculer son premier terme ; en ne conservant dans U que les termes du degré le plus élevé en x, il se réduit à $x^2(ay^2+2by+c+k)$, d'où l'on voit que le terme de $F(x)$ du degré le plus élevé en x est $(ac-b^2)x^4+kax^4$; par suite on a $F(x) = H + kU$, H désignant le hessien de U.

8. Supposons maintenant que nous remplacions U par $\alpha U + 6\beta H$, α et β désignant des quantités numériques indéterminées. Sans faire de nouveau calcul, on sait, par les importantes formules dues à M. Cayley, que H devient $(\alpha\beta S + 9\beta^2 T)U + (\alpha^2 - 3\beta^2 S)H$ (*), S et T désignant les invariants fondamentaux de la forme U.

Par suite $F(x)$ devient $MU + (\alpha^2 - 3\beta^2 S + 6k\beta)H$, M désignant un nombre dont il est inutile d'écrire la valeur.

Pour que le discriminant $F(x)$ prenne donc (à un facteur numérique près) une valeur donnée U, il suffit de choisir la constante k de façon que l'équation $\alpha^2 - 3\beta^2 S + 6k\beta = 0$ soit satisfaite. D'où la proposition suivante :

Soit U *un polynôme quelconque du quatrième degré ; en désignant par* H *son hessien et par* S *son invariant quadratique, l'intégrale générale de l'équation*

$$\frac{dx}{\sqrt{U(x)}} = \frac{dy}{\sqrt{U(y)}}$$

est

$$6\beta(\alpha U + 6\beta H)_2 + (3\beta^2 S - \alpha^2)(x-y)^2 = 0,$$

le rapport $\alpha : \beta$ *étant la constante arbitraire introduite par l'intégration.*

La parenthèse affectée de l'indice 2 désigne ici l'émanant principal de la forme $\alpha U + 6\beta H$.

(*) SALMON, *Algèbre supérieure*, p. 183.

II. — ÉQUATION D'UNE SECTION PLANE ; SYSTÈME DE COORDONNÉES DANS L'ESPACE.

9. L'équation d'une conique tracée sur la surface est de la forme

$$(2) \qquad y(Ax+B)+(Bx+C)+K(y-x)=0\,;$$

je considérerai les quantités A, B, C, K, qui entrent dans cette équation, comme les coordonnées du point de l'espace dont le plan polaire par rapport à la surface est le plan de la conique.

On pourrait aussi les regarder comme les coordonnées tangentielles de ce plan, et je le ferai quelquefois ; mais généralement je les emploierai comme coordonnées ponctuelles.

Cela posé, étant données les équations de deux coniques

$$y(Ax+B)+(Bx+C)+K(y-x)=0 \quad \text{et} \quad y(A'x+B')+(B'x+C')+K'(y-x)=0,$$

on voit par un calcul facile que la condition nécessaire et suffisante, pour que le plan d'une de ces coniques contienne le pôle du plan de l'autre, est contenue dans la relation suivante $AC'+CA'-2BB'+2KK'=0$. Par suite, l'équation du plan polaire (par rapport à la surface) du point de l'espace dont les coordonnées sont A', B', C', K' est

$$AC'+CA'-2BB'+2KK'=0\,;$$

et cette équation étant linéaire par rapport aux variables, il en résulte que le système de coordonnées employé est simplement un système particulier de coordonnées tétraédrales.

10. Dans tout ce qui suit, on voit que j'emploierai simultanément deux systèmes de coordonnées, dont l'un (en x et y) ne se rapporte qu'aux courbes tracées sur la surface, tandis que l'autre (en A, B, C, K) s'étend à tous les points de l'espace.

La même équation, suivant que l'on y considérera les x, y ou les A, B, C, K comme les coordonnées courantes, présentera un sens différent.

11. Cherchons les coordonnées rectilignes d'un point (x, y) de la surface. En désignant par X, Y les coordonnées courantes, la conique suivant laquelle la surface est coupée par le plan polaire du point (ici cette conique se réduit à deux droites) a pour équation

$$(X-x)(Y-y)=XY-yX-xY+xy=0\,;$$

si l'on identifie cette équation avec l'équation (2), on en déduit les relations

$$\frac{A}{1}=\frac{B+K}{-x}=\frac{B-K}{-y}=\frac{C}{xy},$$

d'où encore

$$(3) \qquad \frac{A}{1} = \frac{B}{-\frac{x+y}{2}} = \frac{C}{xy} = \frac{K}{\frac{y-x}{2}}.$$

Ces formules serviront à trouver en coordonnées rectilignes l'équation d'une courbe donnée en *coordonnées sur la surface*, et je ferai, à ce sujet, cette remarque importante que si, dans un invariant de la forme (A, B, C) et d'un nombre quelconque d'autres formes, on remplace respectivement A, B, C, K par les valeurs données ci-dessus, le résultat sera un covariant du système composé de ces formes.

12. En particulier, supposons que l'équation d'une courbe M soit de même degré p par rapport à x et à y; on sait que (nº 5), dans ce cas, son équation est homogène par rapport aux quantités $x-y$, $x+y$ et xy; en remplaçant ces quantités par les expressions données, on obtiendra l'équation d'une surface de degré p, qui contiendra la courbe et dont cette dernière constituera l'intersection complète avec la surface du second degré fondamentale (*); et je ferai observer que cette équation sera un invarian du système de formes qui caractérisent la courbe.

Ainsi, l'équation d'une biquadratique étant

$$y^2(ax^2+2bx+c)+2y(bx^2+2cx+d)+cy^2+2dx+e+k(y-x)^2=0,$$

on pourra la mettre sous la forme

$$ax^2y^2+2bxy(x+y)+c[(y+x)^2+2xy]+2d(x+y)+e+k(y-x)^2=0$$

d'où l'on déduira, en employant le tableau (3), l'équation en coordonnées rectilignes d'une des surfaces du second degré qui contient la biquadratique

$$aC^2-4bBC+c(4B^2+2AC)-4dBA+eA^2+4kK^2=0,$$

ou simplement $E+2kK^2=0$, en désignant par E l'invariant fondamental des formes (A, B, C) et (a, b, c, d, e)

$$\tfrac{1}{2}aC^2-2bBC+c(2B^2+AC)-2dBA+\tfrac{1}{2}eA^2.$$

13. Si l'on élimine les variables x et y entre les équations (3), on obtient évidemment l'équation en coordonnées rectilignes de la surface du second degré S. Cette équation est $K^2+D=0$, en réprésentant, comme je le ferai

(*) Voir, à ce sujet, la note de M. Halphen, même tome, p. 19.

constamment dans la suite de ces recherches, par D l'invariant $AC - B^2$ de la forme (A, B, C).

III. — RECHERCHE DE LA FORME LA PLUS SIMPLE QUE L'ON PEUT DONNER A L'ÉQUATION D'UNE COURBE ; GROUPES DE COURBES.

14. On peut, en faisant varier la conique fondamentale, donner une infinité de formes à l'équation d'une courbe donnée M.

Les formules de transformation peuvent évidemment (sans nuire à leur généralité) être mises sous la forme

$$X = x \quad \text{et} \quad Y = \frac{\alpha y + \beta}{\gamma y + \delta},$$

α, β, γ et δ désignant des quantités numériques ; en sorte que l'on dispose de trois constantes arbitraires.

La chose la plus importante est d'obtenir une équation de la courbe donnée dans laquelle entre le moins de formes possible.

A ce point de vue, on voit facilement que l'équation des cubiques gauches peut, d'une infinité de façons, être mise sous une forme qui ne contienne qu'une forme binaire cubique ; sa forme générale est en effet

$$(ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d)_1 + (a'x + b'y)(y - x) = 0,$$

et l'on peut, d'une infinité de manières, disposer des trois constantes arbitraires en sorte que a' et b' s'évanouissent.

L'équation de la biquadratique peut (comme on le sait déjà) être mise, de quatre façons différentes, sous une forme où n'apparaît qu'un polynôme du quatrième degré.

L'équation générale de la quartique gauche, c'est-à-dire de la courbe du quatrième ordre par laquelle on ne peut faire passer qu'une surface du second ordre, est

$$(ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e)_1 + (a'x^2 + 2b'x + c')(y - x) = 0,$$

et un calcul simple fait voir que l'on peut, d'une seule façon, disposer des constantes arbitraires en sorte que a', b' et c' s'évanouissent ; on peut donc mettre l'équation de la quartique (et cela d'une seule manière bien déterminée) sous une forme où n'apparaît qu'une seule forme biquadratique ; ce sera pour nous l'équation réduite de la courbe.

15. Étant donné un système quelconque de formes, je classerai dans un même groupe toutes les courbes dont l'équation ne dépend que de ces formes et de leurs divers covariants, et je dirai que toutes ces courbes constituent les formes du groupe.

Ainsi étant donnée une forme biquadratique U, les courbes qui appartiendront à son groupe seront toutes celles dont l'équation renferme seulement la forme U elle-même, son hessien H et son covariant du sixième degré J.

Si l'on s'en tient aux courbes dont le degré ne dépasse pas **4**, on voit que ce groupe contient seulement des biquadratiques et des quartiques gauches.

Toutes les biquadratiques du groupe forment un système conjugué par rapport à un tétraèdre fixe qui caractérise le groupe ; c'est-à-dire que les sommets de ce tétraèdre sont les sommets des quatre cônes qui contiennent chacune de ces courbes. Les quartiques jouissent de propriétés analogues par rapport à ce tétraèdre.

C'est le groupe dont je viens de parler que je veux étudier d'abord dans la suite de ces recherches.