Bulletin de la S. M. F.

G. Halphen

Applications nouvelles d'une proposition sur les congruences de droites

Bulletin de la S. M. F., tome 1 (1872-1873), p. 253-256
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1872-1873__1__253_1>

Applications nouvelles d'une proposition sur les congruences de droites;
par M. Halphen.

(Séance du 28 mai 1873)

Les droites de l'espace qui satisfont à deux conditions forment une *congruence*. Le nombre de ces droites qui passent par un point donné est l'*ordre* de la congruence, le nombre de celles qui sont dans un plan donné en est la *classe*. Rappelons que les droites d'une congruence sont tangentes à deux surfaces (ou à deux nappes d'une même surface), qui peuvent se réduire à des lignes. On les désigne ordinairement par surfaces ou lignes *focales* de la congruence. On peut aussi désigner leur ensemble par le nom de *focale* de la congruence.

J'ai démontré (*Comptes rendus de l'Académie des sciences*, t. LXXIV, 2 janvier 1872), que : *Le nombre des droites communes à deux congruences est égal au produit des ordres de ces congruences augmenté du produit de leurs classes.* Je me propose de donner ici trois applications nouvelles de ce théorème.

I. — DÉTERMINATION DU NOMBRE DES TÉTRAÈDRES QUI SATISFONT A CERTAINES CONDITIONS.

Un tétraèdre est déterminé de grandeur et de position si chacune de ses arêtes est assujettie à deux conditions, c'est-à-dire fait partie d'une congruence donnée. Je vais montrer que le nombre des tétraèdres ainsi déterminés s'exprime en fonction des ordres et des classes des six congruences auxquelles appartiennent les six arêtes.

Désignons les arêtes du tétraèdre par les numéros de 1 à 6, et par p_i, P_i, l'ordre et la classe de la congruence C_i dont fait partie l'arête (i). Désignons par $[C_1C_2C_3C_4C_5C_6]$ le nombre des tétraèdres dont les arêtes font partie des congruences $C_1, C_2, \ldots, C_6$, et représentons par (p) la congruence des droites qui passent en un point, par (P) celles des droites qui sont dans un plan.

Si l'on assujettit simplement les cinq premières arêtes à faire partie des cinq congruences $C_1, ..., C_5$, l'arête (6) engendre une congruence dont l'ordre et la classe sont respectivement $[C_1C_2C_3C_4C_5(p)]$ et $[C_1C_2C_3C_4C_5(P)]$. Par suite, si l'arête (6) doit en outre faire partie de la congruence C_6, on obtiendra le nombre de ses positions, ou le nombre des solutions du problème, en additionnant les deux nombres précédents multipliés respectivement par p_6 et P_6. C'est la conséquence immédiate du théorème rappelé plus haut. On a donc cette relation :

$$[C_1C_2C_3C_4C_5C_6] = p_6[C_1C_2C_3C_4C_5(p)] + P_6[(C_1C_2C_3C_4C_5(P)].$$

On aura de même :

$$[C_1C_2C_3C_4C_5(p)] = p_5[C_1C_2C_3C_4(p)(p)] + P_5[C_1C_2C_3C_4(P)(p)], \text{ etc.}$$

On conclut immédiatement de là que le nombre cherché se compose d'une somme de termes, dont chacun est le produit des ordres de n congruences $C_i, C_{i'}, ...$ par les classes des $(6-n)$ autres congruences $C_j, C_{j'}, ...$, multiplié par un coefficient qui est le nombre des tétraèdres dont les arêtes $(i), (i'), ...$ passent par des points, et les arêtes $(j), (j'), ...$ sont dans des plans donnés.

Le problème sera donc résolu si l'on connaît le nombre des solutions des différents problèmes particuliers, dans lesquels les six arêtes du tétraèdre sont assujettis à passer par des points ou à être dans des plans. Or il est facile de reconnaître que tous ces problèmes n'admettent qu'une solution, à l'exception de celui où trois arêtes d'une même face passent par des points et les trois autres sont dans des plans donnés. Ce dernier problème admet deux solutions.

Par conséquent, dans l'expression du nombre cherché, tous les coefficients sont égaux à l'unité, à l'exception des coefficients des termes qui contiennent les ordres des trois congruences auxquelles appartiennent trois arêtes d'une même face et les classes des trois autres.

Si 1, 2, 3 sont les arêtes d'une même face, et 4, 5, 6 les arêtes opposées à 1, 2, 3, on reconnaît aisément que les termes dont il s'agit sont :

$$p_1P_4p_2P_5p_3P_6,\ p_1P_4p_5P_2p_6P_3,\ p_4P_1p_5P_2p_3P_6,\ p_4P_1p_2P_5p_6P_3.$$

En désignant par S la somme de ces termes, on aura pour le nombre cherché N :

$$N = (p_1 + P_1)(p_2 + P_2)(p_3 + P_3)(p_4 + P_4)(p_5 + P_5)(p_6 + P_6) + S.$$

Si, par exemple, chaque arête est assujettie à rencontrer deux droites, les ordres et les classes sont l'unité, et l'on a : $N = 2^6 + 4 = 68$.

II. — SURFACE TRAJECTOIRE DU SOMMET D'UN ANGLE CONSTANT.

Un angle droit se meut de manière que l'un de ses côtés A engendre une congruence C et l'autre A′, une congruence C′. Quel est le lieu de son sommet ?

Ce lieu est une surface dont le degré s'exprime en fonction des ordres et des classes des congruences C et C′.

Si le côté A seul est assujetti à faire partie de la congruence C, et que le sommet se meuve sur une droite, le côté A′ engendre une congruence, dont l'ordre et la classe sont respectivement $P+2p$ et p, p et P étant l'ordre et la classe de la congruence C. Si on assujettit, en outre, le côté A′ à faire partie de la congruence C′, dont p' et P′ sont l'ordre et la classe, le nombre des solutions sera, d'après le théorème rappelé plus haut :

$$p'(P+2p)+P'p=p'P+pP'+2pp'.$$

Par suite, si l'on assujettit les côtés A et A′ à faire partie respectivement des congruences C et C′, sans donner de condition pour le sommet, ce point décrit une surface dont le degré est ce dernier nombre.

On reconnaît aisément que cette surface coupe le plan de l'infini : 1° suivant le cercle commun à toutes les sphères, qui y est multiple d'ordre pp' ; 2° suivant les P droites de la congruence C, qui y sont multiples d'ordre p' ; et suivant les P′ droites de la congruence C′, qui y sont multiples d'ordre p.

Si une portion de la focale d'une des congruences, C, se réduit à une ligne, et que, en chaque point de cette ligne, les droites de la congruence forment un cône de degré μ, cette ligne fait partie de la surface et y est multiple d'ordre $\mu p'$.

On remarquera que tous ces nombres doivent être doublés, si, au lieu d'un angle droit, on considère un angle constant quelconque.

III. — DÉTERMINATION D'UN TRIÈDRE TRIRECTANGLE.

Un trièdre trirectangle est déterminé de position si chacune de ses arêtes fait partie d'une congruence donnée. Soient p_1, P_1 ; p_2, P_2 ; p_3, P_3, les ordres et les classes des trois congruences. Par un raisonnement analogue aux précédents, on trouve que le nombre des solutions est :

$$ap_1p_2p_3+b(p_1p_2P_3+p_2p_3P_1+p_3p_1P_2)+c(p_2P_3P_1+p_3P_1P_2+p_1P_2P_3)+dP_1P_2P_3.$$

Les coefficients a, b, c, d sont les nombres des trièdres trirectangles dont les arêtes passent par des points ou sont dans des plans, en sorte que les congruences à considérer pour obtenir ces coefficients sont pour a, 3 points ; pour b, 2 points et 1 plan ; pour c, 1 point et 2 plans ; pour d, 3 plans.

D'après cela, on reconnaît facilement que les coefficients sont tous égaux à 2 ; de sorte que le nombre des trièdres est : $2(p_1 + P_1)(p_2 + P_2)(p_3 + P_3)$.

Si chaque arête doit rencontrer deux droites, le nombre devient 2^4 ou 16.