Bulletin des sciences
mathématiques et astronomiques

Association française pour l'avancement des sciences. Session de Rouen

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 90-100

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_90_0>

MÉLANGES.

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES.

SESSION DE ROUEN.

I^re ET II^e SECTIONS. — MATHÉMATIQUES, ASTRONOMIE, GÉODÉSIE ET MÉCANIQUE.

Président.............. M. Édouard COLLIGNON, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées.

Vice-Président......... M. Eugène CATALAN, Professeur à l'Université de Liège.

Secrétaires............. M. GOHIERRE DE LONGCHAMPS.
M. WEST.

Séance du 17 août 1883.

M. Édouard Lucas, professeur au Lycée Saint-Louis : *Sur l'arithmétique figurative*. — M. Lucas se propose de montrer l'emploi qu'on peut faire de l'échiquier dans la théorie des permutations. Si l'on numérote les colonnes d'un échiquier carré de gauche à droite, et ses lignes de bas en haut, chaque case sera déterminée par deux coordonnées x, y pouvant avoir les valeurs de $1, 2, \ldots, n$.

Un système de n jetons placés sur un échiquier de n^2 cases, de telle sorte qu'il n'y en ait pas deux sur la même ligne ou sur la même colonne, constitue une *permutation figurée* (en même temps qu'il donne une solution du *problème des tours*). Si l'on considère, en effet, les jetons placés sur les colonnes successives, la suite formée par leurs coordonnées présentera précisément une permutation des n indices $1, 2, \ldots, n$.

M. Lucas détermine successivement le nombre des permutations figurées qui sont symétriques soit par rapport au centre de l'échiquier, soit par rapport à une des diagonales, soit par rapport aux deux diagonales, puis le nombre des permutations figurées qui coïncident avec elles-mêmes lorsqu'on fait tourner l'échiquier d'un quart de tour autour de son centre.

On doit à M. Neuberg (*Mathesis,* t. I, p. 27) deux formules symboliques relatives au nombre Q^n des permutations figurées, n'ayant aucun élément sur une des diagonales, relatives à un échiquier à n^2 cases. Si l'on désigne par P^n le nombre $n!$, ces deux formules sont

$$P^n = (Q+1)^n \quad \text{et} \quad Q^n = (P-1)^n.$$

M. Lucas établit maintenant des formules analogues pour le nombre des permutations figurées qui présentent diverses espèces de symétrie et qui n'ont aucun élément sur l'une des diagonales. Il examine enfin le *problème des fous,* lequel consiste à placer sur un échiquier un nombre maximum de jetons, de telle sorte que deux quelconques d'entre eux ne se trouvent point sur une même parallèle aux diagonales, et fait voir que, pour un échiquier à n^2 cases, le nombre maximum de jetons est $2n-2$, tandis que le nombre total des solutions du problème est égal à 2^n.

M. de Longchamps, professeur au Lycée Charlemagne : *Sur les nombres pseudo-bernoulliens et ultra-bernoulliens.*

M. E. Catalan, professeur à l'Université de Liège, donne lecture d'une série de *Notes d'Algèbre et d'Arithmétique.*

I. Sur la résolution en nombres entiers de l'équation

$$x^2+y^2 = u^2+v^2+w^2.$$

II, III. Sur la série récurrente définie par

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 2a, \quad \ldots \quad P_n = 2aP_{n-1} - P_{n-2},$$

a désignant un nombre entier, tel que $a^2 = 2b^2+1$. La valeur de P_n est

$$P_n = \frac{1}{2b\sqrt{2}}\left[(a+b\sqrt{2})^n - (a-b\sqrt{2})^n\right].$$

Maintenant, si l'on fait

$$Q_n = \tfrac{1}{2}\left[(a+b\sqrt{2})^n + (a-b\sqrt{2})^n\right],$$

l'équation $2x^2 = y^2 - 1$ est vérifiée en posant $x = bP_n$, $y = Q_n$.

Deux nombres consécutifs P_n, P_{n+1} sont toujours premiers entre eux. Si n est pair, P_n est divisible par $P_2 = 2a$. Plus généralement, P_{kl} est divisible par P_k et P_l.

IV. Sur la décomposition de $(a^2+b^2)(a^4+b^4)\ldots(a^{2^n}+b^{2^n})$ en deux carrés.

V. Si a et b désignent des nombres entiers et que l'on pose

$$\alpha = a + \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \beta = a - \sqrt{a^2 + b^2},$$

la quantité

$$\frac{\alpha^{2m-1} + \beta^{2m-1}}{\alpha + \beta}$$

est : 1° la somme de deux carrés; 2° la somme de trois carrés.

VI. Si $x = p$, $y = q$ sont les nombres les *plus simples* satisfaisant à l'équation

$$Ax^2 = y^2 + 1,$$

où $A = a^2 + b^2$, cette équation sera aussi vérifiée par

$$x_n = \frac{(p\sqrt{A} + q)^{2n-1} + (p\sqrt{A} - q)^{2n-1}}{2\sqrt{A}}.$$

M. G. Leveau, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, donne lecture d'un *Mémoire sur les comètes périodiques et particulièrement sur la comète de d'Arrest.*

M. Édouard Collignon : *Sur la chaînette d'égale résistance.* — Dans la chaînette ordinaire, qui est la figure d'équilibre d'un fil homogène pesant, la tension varie d'un point à l'autre de la courbe. M. Collignon se propose de chercher la forme d'équilibre d'un fil à section variable dans lequel la tension par unité de surface serait constante ($=$ R) en tous les points.

Si l'on admet pour axe des x la tangente au point le plus bas de la courbe et pour axe des y la normale de la courbe au même point, on trouve que l'abscisse d'un point de cette courbe est proportionnelle à l'angle formé entre la tangente correspondant à la courbe et l'axe des x. L'équation de la courbe est donc de la forme

$$\cos\frac{x}{a} = e^{-\frac{y}{a}}.$$

Cette courbe est symétrique par rapport à l'axe des y et admet pour asymptotes une série de droites équidistantes, parallèles à cet axe. Du reste, la courbe complète est composée d'une infinité de branches égales, situées du côté des y positifs, comprises entre des valeurs de x égales à $\frac{(4n-1)\pi a}{2}$ et $\frac{(4n+1)\pi a}{2}$, et séparées les unes des autres par des intervalles égaux compris entre les parallèles $x = \frac{(4n+1)\pi a}{2}$ et $x = \frac{(4n+3)\pi a}{2}$.

M. Collignon examine ensuite les propriétés principales de cette courbe, relatives à son arc, son rayon de courbure, son aire, etc.

Si l'on suppose que la section transversale du fil considéré soit un cercle de rayon r très petit, et que l'on désigne par R la tension constante par unité de surface, on aura pour la tension totale

$$T = \pi r^2 R \quad \text{ou bien} \quad T = \frac{\pi r_0^2 R}{\cos \frac{x}{a}},$$

r_0 désignant la valeur de r correspondant au point le plus bas de la courbe. Si l'on représente maintenant la tension T par le poids d'un fil de même rayon que la chaînette au point considéré et de même poids spécifique, la longueur de ce fil devra être constante et égale à a.

De même qu'en prenant le symétrique d'un polygone funiculaire par rapport à un plan horizontal on obtient, d'après Gregory, une *voûte sans frottement,* de même, en renversant la *chaînette d'égale résistance,* on obtient la *voûte sans surcharge* proposée par M. Yvon Villarceau.

M. le colonel Perrier, membre de l'Institut : *Sur le passage de Vénus sur le Soleil.*

Séance du 18 août.

M. Desboves : *Sur la résolution complète en nombres entiers de l'équation biquadratique* $8x^4 - 3y^4 = 5z^2$.

M. Emile Lemoine, ancien élève de l'École Polytechnique : *Sur les nombres considérés en leurs relations avec les nombres formés des mêmes chiffres écrits en sens inverse.*

Soient deux nombres entiers K et K′, qu'on peut supposer avoir un nombre égal de chiffres (puisque autrement on pourrait faire précéder le plus petit d'entre eux par un certain nombre de zéros) et désignons par k et k' les nombres formés avec les chiffres de K et K′ écrits dans l'ordre inverse. M. Lemoine demande quand on peut avoir $K + K' = k + k'$, et démontre que, dans le cas où K et K′ sont d'un nombre pair de chiffres, il faut et il suffit que les chiffres de $p^{\text{ième}}$ ordre de K et K′ aient la même somme que les chiffres du même ordre de k et k', tandis que, dans le cas où le nombre de chiffres de K et K′ est impair, il faut de plus que les chiffres de milieu de K et K′ soient les mêmes.

Le même : *Sur les quatre groupes de deux points du plan d'un triangle qui sont à la fois les foyers d'une conique inscrite et d'une conique circonscrite à ce triangle.*

Les quatre solutions de ce problème correspondent aux quatre cercles qui touchent les côtés du triangle ABC considéré. Ainsi les droites qui joignent les points A, B, C au centre d'un de ces quatre cercles constituent les normales à une conique circonscrite au triangle ABC et homofocale à une conique inscrite dans le même triangle. Cette dernière conique touche les côtés de ABC à des points où ces côtés sont touchés respectivement par trois autres des cercles considérés. Le centre des médianes antiparallèles du triangle formé par les centres de ces trois cercles est le centre des deux coniques homofocales correspondantes.

M. Leveau : *Théorie de Vesta par la méthode de Hansen.*

M. Lechalas : *De l'emploi de l'hypothèse dans les Sciences mathématiques.*

Séance de l'après-midi.

M. Collignon présente un travail de M. *Jung*, professeur à l'Institut technique supérieur de Milan, intitulé : *Sur les systèmes de points qui n'ont point de barycentre.*

M. Jung considère un système de n points pesants n'ayant point de barycentre (c'est-à-dire un système tel que, si l'on applique à ses points des forces parallèles, proportionnelles à leurs masses, ces forces se font équilibre, quelle que soit leur direction) et démontre que *les surfaces centrales d'inertie de tous les groupes de $n - 1$ points appartenant au système sont des surfaces homothétiques de second ordre.* M. Jung ajoute une extension de cette proposition, due à M. Reye, et consistant en ce que *les surfaces centrales de tous les systèmes qu'on peut former en ajoutant au système considéré un point pesant quelconque sont des surfaces homothétiques de second ordre.*

M. Collignon fait ensuite une Communication *sur quelques problèmes sur le mouvement relatif.* Le premier problème traité par M. Collignon est celui-ci :

On suppose qu'un point matériel M, *de masse égale à l'unité, soit attiré vers deux points* O *et* L *proportionnellement aux masses de ces points et aux distances* MO, ML. *Des deux points attirants, l'un* O *est supposé fixe; l'autre* L *est animé d'un mouvement uniforme de rotation autour du premier* (*le plan* OML *restant toujours fixe*). *On donne la vitesse angulaire n du rayon* OL *autour du point* O. *On demande le mouvement du point* M *par rapport à deux axes rectangulaires* OX, OY, *dont l'un coïncide avec la droite* OL.

La solution complète de ce problème se ramène, dans le cas général, à la résolution d'une équation différentielle linéaire du quatrième ordre à coefficients constants. Pourtant, dans le cas où $n^2 = k^2 + k'^2$ (k^2 et k'^2 étant les attractions exercées par les centres O et M sur le point M, supposé à l'unité de distance de ces centres), le problème dépend d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. Dans ce cas, le mouvement absolu peut être considéré comme le résultat de la composition de trois mouvements élémentaires : 1° un mouvement circulaire uniforme de M autour d'un certain point mobile I; 2° un mouvement de translation uniforme du système IM parallèlement à l'axe OY; 3° un mouvement de rotation uniforme des axes OX, OY autour du centre fixe O.

M. Collignon considère en second lieu le mouvement d'un point matériel attiré d'un côté par le globe terrestre, supposé en O, et d'autre part par la Lune, supposée en L, en tenant compte du mouvement que la Lune possède autour de la Terre. Vu les difficultés de ce problème, pris dans toute sa généralité, M. Collignon en restreint un peu l'étendue, de manière à rendre applicables les méthodes d'approximation et les procédés graphiques; aussi suppose-t-il tout d'abord : 1° que l'on fasse abstraction de la résistance de l'air; 2° que le point de départ du mobile soit pris dans le plan même de l'orbite terrestre, au point pour lequel la Lune occupe le zénith, et qu'il soit lancé de manière à ne pas sortir du plan de l'orbite pendant le trajet; 3° que la Lune occupe en ce moment la région apogée de son orbite et enfin qu'elle soit à cette époque en son premier ou en son dernier quartier.

Le problème se ramène de cette manière à la résolution des deux équations différentielles simultanées

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{fmx}{z^3} + \frac{fm'(R-x)}{z'^3} + n^2x + 2n\frac{dy}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{fmy}{z^3} - \frac{fm'y}{z'^3} + n^2y - 2n\frac{dx}{dt},$$

où $\frac{fm}{z^2}$ et $\frac{fm'}{z'^2}$, $(z = \sqrt{x^2+y^2},\ z' = \sqrt{(R-x)^2+y^2})$ représentent les attractions exercées par O et L sur le point M.

Pour simplifier le problème d'intégration, M. Collignon suppose que y ait une valeur absolue très petite, c'est-à-dire que le mouvement du mobile M s'opère aux environs de la droite OL. De cette manière il substitue aux équations précédentes celles-ci :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{fm}{x^2} + \frac{fm'}{(R-x)^2} + n^2x + 2n\frac{dx}{dt},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2n\frac{dx}{dt},$$

dont l'intégration s'effectue au moyen de quadratures.

M. Collignon cherche ensuite à déterminer les constantes introduites par l'intégration de manière que le projectile puisse atteindre la Lune.

M. Édouard Lucas : *Sur le problème du cavalier aux échecs.*

M. Stéphanos : *Sur la décomposition d'une fonction rationnelle en fonctions simples.*

M. Gohierre de Longchamps présente et analyse un Mémoire de M. *Schoute,* professeur à l'Université de Groningue, *sur deux transformations géométriques uniformes.*

M. Schoute étudie dans ce travail deux transformations uniformes (birationnelles) dans le plan, auxquelles il a été conduit en généralisant des résultats dus à M. Le Paige.

La première transformation consiste dans la correspondance involutive établie sur les diverses droites issues d'un point P, par les courbes C_n de degré n passant $n-2$ fois par le point P et une fois par chacun de $4(n-1)$ autres points Q (appartenant par conséquent à un faisceau). Par cette correspondance une droite quelconque est transformée en une courbe d'ordre $2n - 1$ ayant le point P pour point $2(n - 1)^{\text{uple}}$ et les points Q pour points simples. M. Schoute généralise encore ce mode de transformation en remplaçant le faisceau de droites issues de P par un faisceau de courbes C_m d'ordre m, dont une quelconque a la propriété de ne rencontrer chacune des courbes C_n du premier faisceau qu'en deux points. C'est la correspondance entre deux pareils points qu'il considère.

La seconde transformation étudiée par M. Schoute est obtenue en généralisant une transformation plane, due à M. Le Paige, et qui consiste dans la correspondance involutive établie par les droites d issues d'un point fixe P par les cubiques appartenant à un réseau qui passent par le point d'intersection de la droite d avec une droite fixe L.

M. Schoute remplace d'une part le réseau de cubiques par un système linéaire de courbes C_n, d'ordre n, et d'autre part il substitue à la droite L une courbe C_p, d'ordre quelconque $p \leqq n - 2$. Les courbes C_n doivent former un système linéaire à $p + 1$ paramètres et admettre le point P pour point $(n - p - 2)^{\text{iple}}$. La transformation étudiée par M. Schoute consiste ainsi dans la correspondance involutive établie sur les droites issues de P par les courbes C_n qui passent par les p points de rencontre de la droite d avec la courbe C_p.

M. Vaněček, professeur à Firin (Bohême) : *Explications relatives à la transformation par rayons vecteurs réciproques* (communiqué par M. G. de Longchamps).

M. Vaněček trouve que, dans l'exposition des propriétés de la transformation par rayons vecteurs réciproques, certains auteurs tombent dans des inexactitudes qu'il se propose de relever dans cette Communication. Les inexactitudes en question seraient relatives à la manière dont on doit envisager la transformation des courbes passant par un ou par plusieurs points fondamentaux de l'inversion (centre d'inversion et points à l'infini sur le cercle d'inversion). Par exemple, on dit ordinairement qu'un cercle se transforme en un autre cercle, tandis qu'en vérité un cercle se transforme en une courbe du quatrième ordre composée d'un cercle et des deux asymptotes du cercle d'inversion.

Remarques analogues pour le cas de la transformation dans l'espace. Par exemple, on ne doit point dire qu'un plan π se transforme en une sphère, mais qu'il se transforme en une surface du quatrième ordre composée d'une sphère et de deux plans touchant la sphère d'inversion aux points d'intersection du plan π avec le cercle à l'infini.

M. Vaněček : *Sur la transformation des figures polaires réciproques.* — M. Vaněček étudie les lieux décrits par le quatrième sommet d'un tétraèdre, conjugué par rapport à une surface du second ordre, lorsque les trois autres sommets sont assujettis à décrire des droites ou des plans convenables.

Il suppose d'abord que deux des sommets d'un tel tétraèdre doivent se trouver sur deux droites M, M', polaires réciproques par rapport à la surface S^2. Alors, si un troisième sommet L de ce tétraèdre décrit une droite l, le quatrième sommet N décrit une cubique gauche passant par les points d'intersection de S^2 avec les trois droites M, M' et l. D'autre part, si le point L doit se trouver sur un plan a, le point N décrit une surface du troisième ordre passant par le pôle du plan λ et par les deux droites M, M'.

M. Vaněček considère par la suite diverses autres combinaisons sous des conditions élémentaires auxquelles on peut assujettir trois des sommets du tétraèdre considéré, et examine en particulier les cas où les lieux décrits par le quatrième sommet se décomposent.

Séance du 20 août.

M. Mantel, de Delft : *Sur les combinaisons d'éléments dispersés dans un plan.* — M. Mantel se propose de montrer qu'il y a utilité à considérer les combinaisons d'éléments dispersés dans un plan d'une manière déterminée. Il présente d'abord deux exemples d'une pareille application relatifs l'un à la démonstration de la formule du binôme, l'autre aux formules qui donnent les sommes des puissances semblables des racines d'une équation. Il expose ensuite quelques considérations sur le problème des reines au jeu des échecs.

M. G. de Longchamps : *Sur les transformations unicursales et réciproques dans le plan,* c'est-à-dire sur les transformations des formes du plan qui établissent des homographies involutives sur toutes les droites d'un faisceau.

M. Cyp. Stéphanos : *Sur un système remarquable de six positions d'une figure plane sur un plan.* — Étant données cinq positions arbitraires $F'_1, F''_2, \ldots, F^v_5$ d'une figure plane F, sur un plan π, il y a quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de cette figure F dont les cinq positions correspondantes se trouvent sur des cercles. Le quadrangle formé par les centres B_1, B_2, B_3, B_4 de ce cercle et le quadrangle formé par les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 ont la propriété que, de quelque manière qu'on les déplace séparément sur le plan π, leurs points correspondants A_i, B_i constituent quatre couples des points conjugués par rapport à un cercle. De plus, il arrive que la figure F peut prendre sur le plan π une sixième position F^{vi}, telle que les quatre points A_1, A_2, A_3, A_4 de cette figure viennent à tomber sur les mêmes cercles que dans les cinq positions précédentes.

M. Genaille, ingénieur civil : *Sur une machine à calculer.*

M. Laisant : *Sur un système de figures semblables.* — M. Laisant résout par la méthode des équipollences le problème suivant : *Sur les côtés* A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 *d'un triangle* $A_1A_2A_3$, *on construit les triangles* $B_1A_2A_3$, $B_2A_3A_1$, $B_3A_1A_2$ *directement semblables, puis les triangles* $C_1A_2A_3$, $C_2A_3A_1$, $C_3A_1A_2$ *directement semblables, connaissant les points* B_1, B_2, B_3 *et les points* C_1, C_2, C_3 (tels que les centres de gravité des deux triangles $B_1B_2B_3$ et $C_1C_2C_3$ coïncident), *on propose de retrouver le triangle primitif.*

M. Laisant : *Remarque sur les intégrales définies.* — Démonstration et extension d'une formule donnée par M. Marchand (*Nouvelles Ann.*, p. 450; 1882).

M. Édouard Lucas : *Sur un Mémoire de Cauchy et sur les nombres de Bernoulli.*

Séance du 22 août.

M^{me} Clémence Royer : *Critique de l'hypothèse de Laplace et sur la détermination du plan de l'orbite solaire.*

M. Brocard, capitaine du génie à Montpellier : *Nouvelles pro-*

priétés du triangle (communiqué par M. Em. Lemoine). — M. Brocard se propose d'indiquer divers systèmes de points remarquables du plan d'un triangle situés en ligne droite. Plusieurs de ces points sont relatifs aux *cercles de sept points,* ou sont définis à l'aide du procédé bien connu de corespondance entre deux foyers d'une conique inscrite dans un triangle.

M. le général Parmentier : *Sur le problème des n reines aux échecs.* — M. Parmentier s'attache surtout à l'application d'une méthode due à M. de la Noë. Cette méthode a pour point de départ la décomposition de l'échiquier de n^2 cases en un carré central (formé d'une seule case ou de quatre cases suivant que n est impair ou non) et en une suite de bandes concentriques. On est ainsi conduit à une classification rationnelle des solutions du problème en question d'après le nombre des reines qui doivent se trouver sur les bandes successives. Si, en partant d'une solution du problème, on envisage les sept autres, distinctes en général de la première et entre elles, et qui s'en déduisent par rotation ou par symétrie, on remarque qu'elles appartiennent toutes à une même classe.

Pour $n = 6$ il n'y a que quatre solutions, qui sont toutes du type $4 - 2 - 0$ (4 reines sur la bande extérieure et 2 sur la bande moyenne) et peuvent se déduire toutes d'une solution primordiale. — Pour $n = 7$ il y a quarante solutions appartenant à quatre types différents ($4 - 1 - 2 - 0$, $3 - 3 - 1 - 0$, $4 - 2 - 0 - 1$, $4 - 2 - 1 - 0$) et se déduisant de six solutions primordiales.

M. Parmentier présente le tableau de toutes les solutions du problème pour les cas de $n = 6, 7, 8, 9$.

M. Genaille, ingénieur civil : *Graphique de la résistance des matériaux.*

M. Édouard Lucas : *Calendrier perpétuel.*