BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Extrait d'une lettre de M. Bougaief

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 254-256

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_254_1>

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. BOUGAIEF.

Permettez-moi de présenter quelques remarques à propos de l'analyse de l'Ouvrage de M. E. Cesaro : *Sur diverses questions d'arithmétique* (*Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques*, mars 1884). Dans cette analyse sont indiquées les principales formules de la composition.

Je vais considérer ces formules en les comparant avec celles que j'ai indiquées dans l'analyse de ma composition : *Théorie des dérivées numériques* (*Bull.*, janvier 1876), et avec les formules de l'autre composition mentionnée dans cette analyse : *Identités numériques en relation avec les propriétés du symbole* E (*Mat. Sbornik*, t. I, 1866).

L'équation (2) de M. Cesáro n'est autre chose que la formule (14) de mon analyse

$$\Sigma_n \theta(\delta) \Sigma_d \psi(d') = \Sigma_n \psi \delta \Sigma_d \theta(d').$$

A propos de cette formule je dis : « Et sous cette forme elle devient la source d'un grand nombre de lois particulières (p. 19). »

Dans ma composition j'ai indiqué quelques-unes de ces formules.

Pour être plus court, j'ai négligé de les transcrire dans mon analyse, parce que j'ai pensé que chacun peut lui-même faire des applications en nombre infini de ces formules.

Cette formule a été publiée par moi en 1867, avant l'apparition de ma composition analysée dans le *Bulletin*.

Ma formule (14) avec deux fonctions arbitraires est une simple conséquence de ma formule (13) avec trois fonctions arbitraires.

On peut déduire sans difficulté les formules analogues avec n fonctions arbitraires.

La relation (3) de M. Cesáro est un cas particulier de ma relation (12).

La méthode de calcul de la valeur moyenne donnée par M. Cesáro (p. 87 du *Bull.*) n'est autre chose que ma méthode pour déduire les valeurs asymptotiques de la considération des séries numériques (p. 25 de mon analyse). Cette méthode est seulement indiquée dans mon analyse. Elle est considérée avec tous les détails dans mon ouvrage où est imprimée aussi ma correspondance avec M. Kummer au sujet de cette méthode.

La formule élégante signalée à M. Cesáro par M. Hermite (p. 86) se trouve au commencement de mon ouvrage [*Identités numériques* (*Math. Sbornik*), t. I, p. 4, 1866] sous la forme

$$\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{n=\mathcal{E}\frac{u}{b}} \mathcal{E}\frac{n-bu}{a} = \mathop{\mathrm{S}}_{1}^{u=\mathcal{E}\frac{n}{b}} \mathcal{E}\frac{n-au}{b}.$$

Elle est démontrée non seulement pour les nombres entiers, mais pour tous les nombres positifs.

La formule (1) de M. Cesáro n'est autre chose que ma formule

$$\mathrm{Q}(1)\mathcal{E}\frac{n}{1}+\mathrm{Q}(2)\mathcal{E}\frac{n}{2}+\mathrm{Q}(3)\mathcal{E}\frac{n}{3}+\ldots=\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\mathcal{E}\frac{1}{n}}\mathrm{Q}(u)+\mathop{\mathrm{S}}_{1}^{\mathcal{E}\frac{n}{2}}\mathrm{Q}(u)+\ldots,$$

à la page 13 du premier Mémoire de ma position (*Théorie des dérivées numériques*).

Elle est démontrée à la page 114 des *Identités*.

L'idée de formules analogues à (6) est réalisée dans les formules analogues à (6).

A la page 98 de ma composition (*Identités*), les formules sont données sous la forme

$$\underset{u=1}{\overset{\mathcal{E}\phi(n-\psi'_1)}{\mathrm{S}}} \varphi(u) \underset{1}{\overset{\mathcal{E}\phi_1(n-\psi u)}{\mathrm{S}}} \theta(u) = \underset{1}{\overset{\mathcal{E}\phi_1(n-\psi')}{\mathrm{S}}} \theta(u) \underset{1}{\overset{\mathcal{E}\phi(n-\psi_1 u)}{\mathrm{S}}} \varphi(u),$$

$$\underset{u=1}{\overset{\mathcal{E}\phi\left(\frac{n}{\psi'_4}\right)}{\mathrm{S}}} \varphi(u) \underset{1}{\overset{\mathcal{E}\phi_1\left[\frac{n}{\psi}(u)\right]}{\mathrm{S}}} \theta(u) = \underset{1}{\overset{\mathcal{E}\psi_1\left(\frac{n}{\psi^1}\right)}{\mathrm{S}}} \theta(u) \underset{1}{\overset{\mathcal{E}\psi\left[\frac{n}{\psi_1}(u)\right]}{\mathrm{S}}} \varphi(u),$$

où $\varphi(u)$ et $\theta(u)$ sont deux fonctions arbitraires analytiques ou numériques, $\psi(u)$, $\psi_1(u)$ deux fonctions ascendantes analytiques et quelquefois semi-analytiques, $\phi(u)$, $\phi_1(u)$ deux fonctions inverses des fonctions $\psi(u)$ et $\psi_1(u)$.

On peut trouver dans cette composition beaucoup d'autres formules analogues. Une de ces formules (26) est transcrite dans mon analyse. Par des méthodes indiquées dans cette composition, on peut trouver des formules beaucoup plus générales.

Ces formules, et beaucoup d'autres de la même composition, donnent une quantité infinie des conséquences pour l'analyse indéterminée et pour la théorie des fonctions discontinues.

Les différents exemples de ces applications ont été indiqués dans mon ouvrage.

La formule démontrée par M. Perott n'est autre chose que la formule (25) de mon analyse; je déduis cette formule comme je puis déduire une suite illimitée de formules analogues à celle qui a été démontrée par M. Perott.

Mes deux compositions, publiées la première en 1866 et la seconde en 1870-1872, donnent une théorie assez étendue de cette partie générale de la théorie des fonctions discontinues.

Ce n'est pas pour faire une réclamation de priorité que je donne ces indications, mais pour constater que les recherches dans cette partie des Mathématiques sont tout à fait conformes aux idées générales de mes travaux. N. Bougaïef.