Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

L. Rodet

Un exemple de calcul algébrique en Persan

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 8, nº 1 (1884), p. 245-254

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1884_2_8_1_245_1>

UN EXEMPLE DE CALCUL ALGÉBRIQUE EN PERSAN;

PAR M. L. RODET.

Les deux pages dont je donne ici le *fac-simile* quelque peu réduit photographiquement constituent le seul exemple connu d'un calcul algébrique effectué tout au long suivant les principes de l'école arabe. J'insiste sur ce point, parce que, dans tous les traités d'Arithmétique ou d'Algèbre publiés dans l'Inde depuis le commencement de ce siècle pour servir à l'enseignement de la jeunesse indigène, les calculs sont présentés uniquement en imitation de ceux des livres anglais traitant du même sujet, et j'ai lieu de croire qu'il en est de même dans les ouvrages lithographiés en Perse pour l'usage des élèves de la *Medressè-i Shâh*, de Téhéran. Au contraire, le calcul que je présente ici aux lecteurs est absolument original : voilà pourquoi il m'a paru intéressant de le publier et d'en donner une explication détaillée.

Il occupe les folios 101 *verso* et 102 *recto* du manuscrit persan n° 169 de notre Bibliothèque nationale, et il est assez singulier que Wœpcke, qui a eu longtemps ce manuscrit entre les mains, car il lui a fait des emprunts importants, n'ait pas signalé l'existence de ce document curieux. Il est pourtant remarquable à plus d'un point de vue : il met en œuvre un système de notation tout nouveau pour nous; il nous apprend que, mettant à profit la faculté qu'ont certaines lettres de l'écriture arabe de se dilater indéfiniment dans le sens horizontal, les calculateurs orientaux partageaient, à l'aide des désignations les plus indispensables, leur tableau ou leur papier en compartiments dans lesquels venaient se loger les divers détails du calcul. Ces mots, qui servent à la fois d'étiquettes et de barres de division pour les différentes parties du calcul, sont écrits au moyen d'un caractère raide et anguleux tout particulier, que l'on appelle *syâq* ou « écriture de marchand forain ». Les explications complémentaires qui accompagnent souvent les mots étiquettes sont rédigées en arabe et écrites avec le *neskhy déri*, écriture contournée, approchant un peu du *shikesté* des Persans ou du *divâny* des Turcs, bien différente en tous cas du *neskhy* ordinaire, dont le copiste a fait usage dans son texte. L'emploi de ces diverses écritures, peu usitées en Perse et dans l'Inde, paraît avoir quelque chose de conventionnel, je dirais même presque de traditionnel.

Un autre détail intéressant, et tout à fait inattendu pour moi au moment où j'ai découvert ce fragment, c'est qu'au lieu des chiffres ordinaires il est fait usage dans les calculs des *chiffres commerciaux* décrits par Silvestre de Sacy dans sa *Grammaire arabe*, Pl. VIII, et reproduits par Pihan, p. 211 de son recueil des *Signes numériques*. J'ai appris depuis que les musulmans de l'Inde se servent couramment de ces *chiffres commerciaux* pour écrire, dans une somme d'argent, les roupies entières, désignant au moyen d'un chiffre ordinaire seulement les annas qui forment l'appoint. Les signes employés ici ne diffèrent que par des nuances insignifiantes de ceux du tableau de Pihan, lequel m'a été, par suite, d'une très grande utilité pour déchiffrer le calcul que j'analyse et en comprendre le sens. Dans la première partie du calcul, les chiffres commerciaux et les vulgaires sont employés concurremment, mais non indifféremment, car les vulgaires servent à écrire les valeurs attribuées à la variable, les commerciaux pour représenter les valeurs correspondantes de la fonction.

Après ces observations préliminaires, j'aborde la description détaillée des deux pages en question.

En tête, et dans les trois premières lignes, se trouve l'énoncé du problème, lequel ne présente aucune difficulté de lecture; je me contente donc de le transcrire (1) et de le traduire mot à mot.

Mes$_2$ala : *Shakhs$_0$-î angushtarî-é zar dârad, ba-wazn-é panj més$_2$qâl, bâ nakîn-é la8l. Qîmat-é zar, yak dînâr céhâr dînâr; va qîmat-é la8l, yak més$_2$qâl dah dînâr. Va majmû8. béhâr-é angushtarî, bîst-o céhar dînâr.* Ba-méqdâr, *zar va la8l, har yak cand bâshad?* « Problème : Une personne a un anneau d'or du poids de 5 *mitsqâls,* avec un chaton en rubis. La valeur de l'or est de 1 *dînâr* pour 4 deniers, celle du rubis, 1 *mitsqâl* pour 10 deniers. L'ensemble, le prix de l'anneau, est de 24 deniers. Quelle est la quantité de chaque matière, or et rubis? ».

Il est bon de rappeler, pour l'intelligence de cet énoncé, que la valeur pondérale du *mitsqâl* et du *dînâr* est identiquement la même; ce sont deux noms d'une même grandeur.

Après cet énoncé, on lit (fin de la troisième ligne et commencement de la quatrième) : *ba-t$_0$arîq el-khat$_0$âyîn* « par le moyen des deux fausses positions ». C'est donc ce procédé que l'auteur va employer d'abord : suivons-le attentivement.

La quatrième ligne est remplie par les deux titres *mâl bi'l-farz$_0$ avval,* « valeur dans la première (sup)position »; *mâl bi'l-farz$_0$* 2, « valeur dans la deuxième (sup)position » (2).

Les longues queues des *lams* de *avval* et de *mâl* dessinent nettement deux colonnes dans lesquelles vont se distribuer les détails du calcul. La première colonne va être consacrée à faire voir les effets de la première hypothèse, faite sur les poids de l'or et du rubis; dans la deuxième colonne viendront s'inscrire les nombres résultant de la seconde hypothèse. A cet effet, chaque colonne est encore partagée en deux sous les étiquettes respectives

(1) Au lieu des points sur et sous les lettres dont font usage les orientalistes, j'ai préféré adopter dans ma transcription des indices, plus faciles à réaliser en typographie : ce sont en général de simples numéros d'ordre : toutefois *o* désigne les emphatiques arabes, *r* les cérébrales indiennes, etc. En outre, j'ai conservé *kh* pour le son du *ch* allemand plus ou moins dur, *sh* pour notre *ch*, *zh* pour notre *j* (en persan) : *q* a un son tout particulier; enfin $c = tch$, $j = dj$, *g* est toujours dur; 8 représente le *ain.*

(2) *Mâl* doit évidemment se prendre ici non pas dans le sens de x^2 qu'il a d'ordinaire en Algèbre, mais dans celui de *somme d'argent,* le *mammon* d'Aben Ezra, le *avere* de Léonard de Pise.

Folio 101, *verso*.

مسئله شخصی انگشتری زر دارد بوزن پنج مثقال با نگین لعل
قیمت زر یک دینار چهار دینار و قیمت لعل یک مثقال ده دینار و مجموع بهار
انگشتری بیست و چهار دینار مقدار زر و لعل هر یک چند باشد بطریق
الخطاین مال بالفرض اول مال بالفرض ۲

طلا لعل طلا لعل
۱ ۳ ۲

یح یح لك عـ

وطـ وطـ
زاید زاید
۲ ۸

الصواب

طلا لعل المقسوم علیه

۱ عو وهو ما بین الخطاین
۳ ۳

۶

استخراج بطریق الجبر والمقابله مثال

لعل طلا مجموعهما

شی احد الاشیا عـ مال
ما لعل

تعادل الواحد

عا ما لعل
لعل ما وهو وزن الفص

Folio 102, *recto*.

الخاتم

فضة لعل مجهول الوزن

الصهر — الطلاء — جرم ناصل

كل مثقال — كل مثقال — مهما

الفضة — خاتم

لعل مجهول المقدار وهو — طلا و ناصل

ثلثي

مهما — مهما

عاما — ليما

مجموعهما

عا

معادل

ابن الواحد — والباقي

وهو الفص بعادل — وهو الخاتم

مثقال — لما ناصل

مهما — مهما

$t_0il\hat{a}$, « or » ; *la8l*, « rubis ». C'est ici surtout que commence l'emploi régulier de l'écriture *syâq*.

La première hypothèse consiste à poser 4 mitsquâls d'or et 1 de rubis. Ces nombres sont inscrits en chiffres vulgaires au-dessous des noms de ces matières servant d'étiquettes, ainsi que je viens de le dire. Au-dessous, en chiffres commerciaux, cette fois, sont inscrites les sommes partielles qui résultent de l'application à ces nombres des valeurs vénales de chaque matière telles qu'elles sont données dans l'énoncé. On a ainsi : Or, $4 \times 4 = 16$; rubis, $1 \times 10 = 10$; or, $3 \times 4 = 12$; rubis, $2 \times 10 = 20$. Enfin, au dessous encore, et dans chaque colonne, sous la désignation de $khat_0\hat{a}$, « erreur » (écrit d'une manière un peu fantaisiste, mais très lisible en somme), et dans le cas présent avec l'annotation *zaïd*, « additive, en plus », l'erreur commise sur la valeur de la fonction dans chacune des deux hypothèses, savoir : dans le premier cas, $16 + 10 = 26 = 24 + 2$; dans le second,

$$12 + 20 = 32 = 24 + 8.$$

Les erreurs 2 et 8 sont écrites en chiffres vulgaires.

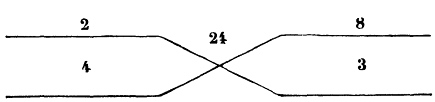
Ici les deux colonnes sont interrompues par un grand *mâl* dont le *lam* final occupe toute la largeur du papier : au-dessous, en manière d'annotation, on trouve écrit *javâb*, « réponse, solution ». Puis le champ du calcul se trouve partagé en trois colonnes par les titres respectifs $t_0il\hat{a}$, « or »; *la8l*, « rubis », et *el-maqsûm 8alay-hi*, « diviseur » ; cette dernière porte encore le supplément d'explication qui suit, en arabe : « *va hûa mâ bîn el-khat*$_0$*âyîn*, « or c'est ce qui est entre les deux erreurs », c'est-à-dire « leur différence », et on y lit le chiffre 6. Or, si nous divisons par cette différence 6 la première erreur 2, nous obtenons $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ comme correction à faire subir au poids posé de l'or, ce qui porte à $4\frac{1}{3}$ le poids réel du métal, ainsi qu'on le lit à la première colonne. Seulement il en résulte pour le poids du rubis $\frac{2}{3}$ et non $\frac{4}{3}$, comme le copiste l'a écrit par erreur. Les prix correspondants, $4\frac{1}{3} \times 4 = 17\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}10 = 6\frac{2}{3}$ (dont la somme fait bien 24), sont écrits au-dessous des poids en chiffres commerciaux. Le « tiers » est écrit en toutes lettres, s_2uls_2; les $\frac{2}{3}$ ont ici une figure dont je ne me rends pas compte : nous les verrons, dans le reste du calcul, écrits très régulièrement s_2uls_2ey pour s_2uls_2eyn.

Jusqu'ici donc notre tableau renferme et expose la solution du problème par la méthode de double fausse position ; ce tableau, dans sa première partie, peut se transcrire :

Valeur dans la 1re *hypothèse.*		*Valeur dans la* 2e *hypothèse.*	
Or.	Rubis.	Or.	Rubis.
4	1	3	2
XVI	X	XII	XX
Erreur en plus.		Erreur en plus.	
2		8	

Vraie valeur. (*Réponse.*)		Diviseur. (Différence entre les erreurs.)
Or.	Rubis.	
4	0	6
$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	
XVII	VI	
un tiers	deux tiers	

Remarque. — Depuis les travaux de Woepcke on est habitué à croire que, chez les Arabes, la pratique de la double fausse position est inséparable de l'emploi des « plateaux de balance », *el-kiffât*, c'est-à-dire que, dans le cas présent, le calcul du poids de l'or se ferait à l'aide de la figure suivante.



D'où la vraie valeur $4 - \frac{2}{6} = 3 + \frac{8}{6}$.

Comme tout le monde, j'avais adopté cet article de foi, d'autant mieux que j'avais rencontré cette balance, employée couramment, dans un immense traité en Persan (*Khazânat-ul 8ilm* « trésor de la science »), composé par un Hindou de Patna (*Dewân kânh-jî*), et fini d'imprimer à Calcutta en 1837. Aussi ai-je été grandement étonné lorsque j'ai découvert dans mon manuscrit (lequel, soit dit entre parenthèses, doit avoir été écrit dans l'Inde ou non loin de l'Inde) le calcul disposé en forme de tableau, ainsi que je viens de le reproduire et de le transcrire. Je ne doute pas que telle ait été véritablement la manière de procéder des Persans et des Arabes orientaux, et c'est un argument de plus, si minime qu'il soit, qui vient s'ajouter à tous ceux que M. Cantor, dans ses *Vorlesungen* *zur Geschichte der Mathematik,* a réunis pour établir une ligne de démarcation profonde entre l'École maghrebine et l'École orientale. La balance, pour la solution des problèmes par la fausse position, était d'un emploi régulier chez les Maghrebins; les Orientaux devaient se servir du tableau qui nous occupe.

Je reprends maintenant la description et l'étude de la suite du tableau.

La deuxième Partie est annoncée par ces mots écrits en rouge dans le manuscrit : *Istikhrâj ba-$t_0$arîq al-jebr wel-muqâbala,* « Détermination par la voie de l'Algèbre » (1).

Toute la fin de la première page et le commencement de la seconde fournissent ensuite le tableau suivant :

Transcription.		*Traduction.*	
LA8L.	T_0ILA.	Rubis.	Or.
shey'	V *illâ shey'an*	x	$5-x$
qîmat	qîmat	valeur	valeur
X *ashya'*	XX *illâ* IV *ashya'*	$10x$	$20-4x$

(en troisième colonne)

MES$_2$AL.	ÉQUATION.
majmu8-humâ	leur somme
XX *mu8adil* VI *ashya'* XXIV	$20+6x=24$
fa 'l-shey'u 'l-wâh$_1$ed ya8dal	et un seul x égale
s$_2$ul$_2$sey dînâr	$\frac{2}{3}$ *de denier*
wa-hûa wazn el-la8l	qui est le poids du rubis
QIMAT.	VALEUR.
VI *s$_2$uls$_2$sey*	$6\frac{2}{3}$

(1) On sait que ce que nous appelons *Algèbre* porte toujours chez les Arabes le double nom *Jebr wal muqâbala,* double désignation qui s'est longtemps perpétuée en Occident. J'ai fait voir que, primitivement, *jebr* traduisait le sanscrit *chêda gamana* (*disparition des dénominateurs*) et *muqâbala* le *samaçodhana* (*enlèvement des semblables*); mais que, dès le début de l'Algèbre arabe, Al-khârizmi, élève des Grecs, ne chassant pas les dénominateurs, avait à tort attribué *jebr* au changement de signe des termes négatifs en les changeant de membre, et *muqâbala* à la réduction des termes rendus tous positifs, ce qui avait causé l'embarras des historiens qui, jusque-là, avaient cherché dans l'arabe seul l'explication de la formule.

Au commencement de la seconde page, le calculateur s'apprête probablement à appliquer la règle suivante qu'il énonce en marge :

« Les valeurs (estimatives) du chaton et de l'anneau étant données, retranchez la plus petite de la plus grande, le reste sera le *diviseur*. Ensuite, prenez le poids total de la bague, multipliez-le par la valeur du rubis, la différence entre le résultat et le prix (donné) de la bague est le *dividende :* divisez, et le quotient sera le poids de l'or. Et si l'on multiplie le poids de la bague de la même façon par la valeur de l'or, et divise la différence entre ce nombre et le prix de la bague par le diviseur, le résultat est le poids du rubis. Et Dieu sait! ».

En notation algébrique moderne, si l'on désigne :

le poids du rubis par x, celui de l'or par y,
la valeur » a, celle de » b,
le poids de l'ensemble par p et son prix par c,

on calculera d'après la règle énoncée

$$x = \frac{c - bp}{a - b}, \quad y = \frac{ap - c}{a - b}.$$

Or ces deux valeurs sont les solutions du système de deux équations

$$ax + by = c,$$
$$x + y = p.$$

Comment les Arabes étaient-ils parvenus à cette solution? Je n'ai aucune donnée pour le trouver; en tous cas, notre calculateur semble avoir été peu familier avec son application, car, après avoir commencé en ces termes :

Al-Khatam **fas$_0$s$_0$-ho la8l majhûl el-wazn.**			**Le cachet** **dont le chaton en rubis est de poids inconnu.**		
AL-LA8L.	AL-T$_0$ILA.	HAR MES$_2$AQIL.	RUBIS.	OR.	TOUS LES MITSQALS.
Coll-mesqâl : x *d*	Coll-mesqâl : IV *d*	Behhâ : XXIV *d*	Chaque mitsqal : 10 deniers	Chaque mitsqal : 4 deniers	Valeur : 24 deniers.

AL-FAS$_0$S$_0$.	KHATAM-HO.	LE CHATON.	SON ANNEAU.
La8l majûl el-miqdâr wa-hûa : s_2uls_2ey	t$_0$ilâ har mes$_2$âqîl.	Le rubis de quantité inconnue est $\frac{2}{3}$	d'or tous les mitsquâls.

Il ne continue pas le calcul, mais répond par une méthode tout autre :

S$_2$aman-hâ	Sâ-s$_2$aman-hâ'	Sa valeur	Sa contre-valeur
x *ashyâ'*	xx *d* iv *ashyâ*	$10x$	20 deniers-$4x$
mâjmu8-humâ		leur somme	
xx			
vi *ashyâ'*		$20 + 6x$	
mu-8â-del		é-ga-le	
xxiv *d.*		24 deniers.	
Fe 'l-shey' el-wâhid,	wa 'l-bâqî	Or un seul x	et le reste
wa hûa el-fas$_0$s$_0$, mu8âdel	wa hûa 'l-khâtam	c'est le chaton égal à	c'est l'anneau
s$_2$uls$_2$ey mes$_2$qâl	iv mes$_2$âqîl	$\frac{2}{3}$ mitsqâl :	$4\frac{1}{3}$ mitsqâls :
s$_2$aman-hâ :	s$_2$aman-hâ :	Valeur :	valeur :
vi *d*	xvii *d*	6 deniers $\frac{2}{3}$;	17 deniers $\frac{1}{3}$.
s$_2$uls$_2$ey ;	s$_2$uls$_2$		