

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Extrait d'une lettre de M. Selivanof à M. Hermite

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série,
tome 7, n° 1 (1883), p. 246-247

http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_246_1

© Gauthier-Villars, 1883, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE M. SELIVANOF A M. HERMITE.

Pour résoudre l'équation du quatrième degré ⁽¹⁾, Ferrari ramène son premier membre à la différence de deux carrés, d'où la résolution de l'équation proposée est immédiate. La manière la plus simple d'y parvenir me semble la suivante :

Étant donnée l'équation

$$f(x) = ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

nous introduisons pour l'homogénéité y ,

$$f(x, y) = ax^4 + 4bx^3y + 6cx^2y^2 + 4dxy^3 + ey^4.$$

Cette forme biquadratique se transforme en une forme quadratique, en posant

$$x^2 = z_1, \quad 2xy = z_2, \quad y^2 = z_3$$

et l'on trouve

$$F(z_1, z_2, z_3) = az_1^2 + 2bz_1z_2 + (6c + 4u)z_1z_3 - uz_2^2 + 2dz_2z_3 + ez_3^2,$$

⁽¹⁾ Voir aussi à ce sujet le Mémoire de M. Darboux *Sur l'équation du quatrième degré*, dans le *Journal de Liouville*, 2^e série, t. XVIII, p. 220.

ou, en remplaçant $4c z_1 z_3$ par $c z_2^2$,

$$F(z_1, z_2, z_3) + az_1^2 = 2bz_1 z_2 + 2(c + 2u)z_1 z_3 + (c - u)z_2^2 \\ + 2dz_2 z_3 + ez_3^2.$$

D'après la méthode de Ferrari, cette forme se transforme en

$$A(z_1 + mz_2 + mz_3)^2 + B(z_2 + pz_3)^2 + Cz_3^2.$$

Pour avoir la somme de deux carrés, il faut déterminer u de manière que

$$ABC = 0.$$

Quelle que soit la valeur de u , la forme $F(z_1, z_2, z_3)$ se transforme en $f(x, y)$ en passant de z_1, z_2, z_3 à x et y . La forme $F(z_1, z_2, z_3)$, contenant la quantité arbitraire u , est identique avec la forme $f(x, y)$.

Le produit ABC est égal au déterminant de la forme quadratique $F(z_1, z_2, z_3)$. Nous avons donc l'équation résolvante de Ferrari sous cette forme élégante :

$$\begin{vmatrix} a & b & c + 2u \\ b & c - u & d \\ c + 2u & d & e \end{vmatrix} = 0.$$

Ce résultat est dû à M. Aronhold. Il est publié dans le t. 52 du *Journal de Crelle*, p. 95, mais la voie par laquelle on y parvient n'y est pas indiquée.

Quelques indications de M. Kronecker m'ont donné le moyen d'éclaircir cette voie.