Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Extrait d'une lettre adressée à M. Hoüel

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 7, nº 1 (1883), p. 142-144
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1883_2_7_1_142_0>

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HOÜEL.

Vous m'avez fait l'honneur d'insérer dans le *Bulletin* (t. II, 1re série) votre traduction de mes études sur la convergence des séries. Dès lors, grâce à votre amabilité, ces études ont attiré l'attention des savants, et M. Korkine a eu l'occasion de donner une autre démonstration de mon théorème (*Bulletin,* t. II, 2e série, extrait d'une Lettre à M. Hermite).

Aujourd'hui je me propose de présenter quelques additions propres à compléter mes recherches antérieures. A la fin de ces recherches, je disais que la règle que j'avais donnée ne comportait pas de séries exceptionnelles; néanmoins je tâcherai d'en présenter aujourd'hui quelques-unes, dont la convergence ne saurait être prouvée par mon critérium et bien moins encore par les règles connues jusqu'à présent. En même temps j'ai l'intention de présenter une autre preuve de mon théorème.

Soit ψx une fonction ayant une seule valeur pour toutes les valeurs réelles et positives comprises entre les limites b et ∞ de la variable x. Supposons que cette fonction croisse infiniment avec x et satisfasse à l'inégalité $\psi x < x$. Faisons $\psi b = a$, désignons par $\psi^k x$ une fonction qui indique que l'opération représentée par le symbole ψ doit être effectuée k fois sur la variable x. Soit ξ le plus grand entier positif satisfaisant à l'inégalité $\psi^\xi x \geqq b$. Cet entier croîtra indéfiniment avec x. Il est aisé de voir que

$$\varphi x = \frac{\psi^\xi x}{b-a} + \xi$$

est une fonction [1] croissant continuellement entre les limites b et ∞, et satisfait à l'équation

$$\varphi\psi x = \varphi x - 1. \tag{1}$$

---

[1] La dérivée de cette fonction

$$\varphi' x = \frac{1}{b-a}\,\psi' x.\psi'\psi x.\psi'\psi^2 x\ldots\psi'\psi^{\xi-1} x$$

n'est pas continue en général; mais pour x croissant elle décroît constamment si l'on a $\psi' b \leqq 1$, ce que l'on peut toujours supposer; c'est la seule condition pour que notre démonstration soit juste.

Comme l'intégrale

$$\int_b^x \varphi' x\, dx = \varphi x - a$$

croît indéfiniment avec x, la série

(2) $$\varphi'(n) + \varphi'(n+1) + \varphi'(n+2) + \ldots$$

sera divergente. Comparons maintenant une série quelconque

(3) $$f(n) + f(n+1) + f(n+2) + \ldots$$

à la série précédente et désignons par Px le rapport de leurs termes généraux

$$Px = \frac{fx}{\varphi' x}.$$

Si avec la croissance de x la limite de ce rapport n'est pas égale à zéro, la série (3) est divergente. Supposons que Px croisse avec x, alors

$$\lim \frac{Px}{P\psi x} \geqq 1;$$

mais il est aisé de voir que

$$\frac{Px}{P\psi x} = \frac{fx}{\psi' x . f\psi x}.$$

De cette manière nous arrivons à la conclusion suivante :

Si avec la croissance de x la limite du rapport

$$\frac{fx}{\psi' x . f\psi x}$$

est plus grande que l'unité, la série (3) *est divergente.*

Afin de découvrir maintenant le critérium de la convergence, soit α un nombre positif quelconque et examinons l'intégrale

$$\int_b^x (\varphi x)^{-1-\alpha} \varphi' x\, dx = \frac{a^{-\alpha}}{\alpha} - \frac{1}{\alpha}(\varphi x)^{-\alpha},$$

qui avec la croissance de x tend vers une limite finie, d'où il résulte que la série

(4) $$\frac{\varphi'(n)}{[\varphi(n)]^{1+\alpha}} + \frac{\varphi'(n+1)}{[\varphi(n+1)]^{1+\alpha}} + \ldots$$

est convergente. Comparons la série (3) à cette dernière série et désignons par Qx le rapport de leurs termes généraux

$$Qx = \frac{fx(\varphi x)^{1+\alpha}}{\varphi' x}.$$

Si ce rapport ne croît pas indéfiniment avec x, la série (3) est convergente. Supposons que Qx décroît, et, par suite,

$$\lim \frac{Qx}{Q\psi x} \leqq 1;$$

mais il est aisé de voir que

$$\frac{Qx}{Q\psi x} = \frac{fx}{\psi' x f\psi x}\left(\frac{\varphi x}{\varphi x - 1}\right)^{1+\alpha}.$$

De cette manière nous arrivons à la conclusion suivante :

Si avec la croissance de x la limite du rapport

$$\frac{fx}{\psi' x . f\psi x}$$

est moindre que l'unité, la série (3) *est convergente.*

Dans mes recherches antérieures on démontrait que $\psi x = \log x$ donne le caractère de convergence le plus simple et le plus sensible. Si dans les séries (2) et (4) nous posons $\psi x = \log x$, la première de ces séries diverge et la seconde converge très lentement. Or, ce sont là ces espèces de séries dont la convergence ne peut être démontrée par aucune des règles connues jusqu'à présent et qui, d'après la règle de convergence, que j'ai donnée, se présentent comme cas douteux. On peut trouver des séries qui croissent ou décroissent encore plus lentement : on n'aurait qu'à introduire dans l'analyse de nouvelles fonctions, dont la formation, ainsi que M. Korkine l'a démontré, fût en liaison avec l'équation fonctionnelle (1). M. Korkine, dans sa lettre à M. Hermite mentionnée plus haut, résout l'équation (1) et les questions qui s'y rapportent, par la décomposition des fonctions en séries. L'artifice dont je me suis servi ici, pour résoudre l'équation (1), ne peut s'appliquer qu'à certaines fonctions et à la valeur réelle et déterminée de la variable x. V. Ermakof.