BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

PAUL TANNERY

Sur les fragments de Héron d'Alexandrie conservés par Proclus

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 99-108

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_99_0>

MÉLANGES.

SUR LES FRAGMENTS DE HÉRON D'ALEXANDRIE CONSERVÉS PAR PROCLUS;

PAR M. PAUL TANNERY.

1. Dans son *Commentaire sur le premier Livre d'Euclide* (¹), Proclus cite six fois Héron d'Alexandrie.

La première, où il énumère (p. 41), parmi les subdivisions de la Mécanique, — « la *thaumatopœique* (construction de jouets ou d'artifices merveilleux), qui s'attache aux effets obtenus soit par les vents, comme en traitent et Ctésibios et Héron, soit, etc. » — se rapporte à l'Ouvrage bien connu des Πνευματικά, publié dans les *Veteres mathematici* de Thevenot (Paris, 1693).

Les cinq autres citations sont des fragments relatifs à la Géométrie élémentaire :

I (p. 196).

« Il ne faut d'ailleurs ni en réduire le nombre (des axiomes) au minimum, comme le fait Héron qui n'en pose que trois, — car c'est un axiome que le tout est plus grand que la partie; le géomètre (Euclide) l'emploie assez souvent dans ses démonstrations, comme aussi que les choses qui coïncident sont égales; celui-ci sert immédiatement pour le but de la proposition IV, — ni, etc.... »

Ainsi Héron n'aurait admis que les trois premiers axiomes connus par Proclus, — l'égalité entre elles de deux choses égales à une troisième, — l'égalité des sommes de parties égales, — l'égalité des différences de choses égales de part et d'autre.

II (p. 305).

Sur la proposition XVI du Livre Ier d'Euclide : « Dans tout triangle dont on prolonge un côté, l'angle extérieur du triangle est supérieur à l'un quelconque des intérieurs non adjacents.

(¹) Nous citons l'édition *Procli Diadochi in primum Euclidis Elementorum librum commentarii*, de Friedlein. Leipzig, 1873.

» Cette proposition, énoncée incomplètement par certains auteurs, sans le membre de phrase *dont on prolonge un côté,* a fourni une occasion d'attaque, peut-être à plusieurs autres, en tous cas à Philippos, comme le dit le *mécanicien* Héron. Car en général, un triangle, en tant que tel, n'a point d'angle extérieur. »

III (p. 323).

Sur la proposition XX, que dans tout triangle la somme de deux côtés quelconques est supérieure au troisième.

« Il faut rappeler brièvement les autres démonstrations du théorème proposé, comme elles ont été données par les héroniens et Porphyre, sans prolonger de droite, comme l'a fait l'Élémentaire (Euclide).

» Soit le triangle ABC. Il faut montrer que $AB + AC > BC$. Divisez par moitié l'angle en A. Dans le triangle ABE, l'angle extérieur $\widehat{AEC} > \widehat{BAE}$. Mais $\widehat{BAE} = \widehat{EAC}$. Donc $\widehat{AEC} > \widehat{EAC}$, de sorte que le côté $AC > CE$. De même $AB > BE$. Car dans le triangle AEC, l'extérieur $\widehat{AEB} > \widehat{CAE} = \widehat{EAB}$, de sorte que $AB > BE$. Donc $AB + AC >$ la somme BC. Nous ferions la même démonstration pour les autres côtés. »

A la suite de cette démonstration, Proclus en donne deux autres; la dernière, faite par l'absurde, ne peut être attribuée à Héron, qui évitait ce procédé (voir le fragment suivant); la seconde revient à la première, mais elle en diffère en ce qu'on se borne à l'effectuer dans le cas où un côté est plus grand que chacun des deux autres, et qu'au lieu de mener la sécante AE comme bissectrice de l'angle en A, on lui fait intercepter sur le plus grand côté un segment égal à l'un des deux autres côtés; il ne reste donc qu'à démontrer l'inégalité pour l'autre segment. Ces simplifications apparentes et terre à terre semblent peu dignes d'un maître.

IV (p. 340).

Sur la proposition XXV : « Si deux triangles ont deux côtés égaux chacun à chacun, et l'un la base plus grande que l'autre, son angle compris entre les côtés égaux sera également plus grand. » La démonstration d'Euclide est faite par l'absurde.

« Voici comment cette proposition est démontrée, par Héron le mécanicien, sans réduction à l'impossible.

» Soient les triangles ABC, DEF et les mêmes hypothèses (savoir $AB = DE$, $AC = DF$, $BC > EF$).

» Puisque $BC > EF$, prolongez EF en prenant $EH = BC$. De même prolongez ED en prenant $DG = DF$. Le cercle décrit de D comme centre avec DF pour rayon passera par G; soit FKG ce cercle. Puisque $BC < AC + AB = EG$, et que $BC = HE$, le cercle décrit de E comme centre, avec EH pour rayon, coupera EG. Soit HK ce cercle, menez KD, KE de l'intersection commune des deux cercles à leurs centres.

» Puisque D est centre de GKF, $GD = DK = DF = AC$. D'autre part, puisque E est centre de HK, $EK = EH = BC$. Donc, puisque les côtés AB, AC, BC sont respectivement égaux à DE, DK, EK, $\widehat{BAC} = \widehat{EDK}$. Donc $\widehat{BAC} > \widehat{FDE}$. »

V (p. 429).

Sur la proposition XLVII, théorème du carré de l'hypoténuse.

« Ce que d'autres ont ajouté en plus, comme les héroniens et Pappus, oblige à recourir à des propositions du Livre VI, et n'a point de rapport avec le sujet présent. »

2. Les questions que soulèvent ces fragments sont surtout relatives à leur origine. Viennent-ils d'un commentaire particulier composé par Héron sur les *Éléments?* Ont-ils été tirés d'un autre Ouvrage, et quelle était, dans ce cas, la nature de cet Ouvrage?

M. Th.-H. Martin (¹) admet l'existence du commentaire particulier; Héron aurait, d'ailleurs, composé un grand Ouvrage de Géométrie, connu, d'après Eutocius, sous le nom de *Métriques* (Μετρικά), et dont il nous resterait d'importants débris, appartenant à quatre parties distinctes :

1. *Prolégomènes aux éléments d'Arithmétique* (Τὰ πρὸ τῆς Ἀριθμητικῆς στοιχειώσεως).

(¹) *Recherches sur la vie et les Ouvrages de Héron d'Alexandrie et sur tous les Ouvrages mathématiques grecs qui ont été attribues à un auteur nomme Héron.* Paris, 1854; voir p. 95-98, 102, 104, 120, 176.

II. *Prolégomènes aux éléments de Géométrie* (Τὰ πρὸ τῆς Γεωμετρικῆς στοιχειώσεως).

III. *Introductions géométriques* (Εἰσαγωγαὶ τῶν γεωμετρουμένων).

IV. *Introductions stéréométriques* (Εἰσαγωγαὶ τῶν στερεομετρουμένων).

Le savant éditeur de la collection des écrits héroniens ([1]), M. Hultsch ([2]), doute de l'existence du Commentaire particulier; mais reconnaissant, avec M. Th.-H. Martin, que les *Prolégomènes* sont relatifs aux *Éléments* d'Euclide, il les rejette hors du grand Ouvrage héronien, dont le titre semble avoir été *Géométrie* (Γεωμετρία ou Γεωμετρούμενα), et qui devait comprendre la partie *métrique* citée par Eutocius.

En somme, ces deux illustres érudits admettent, chacun sous une forme différente, un travail particulier de Héron sur Euclide.

M. Cantor ([3]) remarque, à bon droit, qu'il est très douteux *a priori* qu'un commentaire sur les *Éléments* ait été écrit dès le Ier siècle avant J.-C., et qu'on puisse surtout l'attribuer à un mathématicien aussi incontestablement original que Héron d'Alexandrie.

En ce qui concerne les *Prolégomènes*, exclusivement connus par le petit Traité des *Définitions des termes de Géométrie* (*Héron* ([4]), p. 1-40) qui en faisait partie, j'ai déjà soutenu, ailleurs, l'opinion de Friedlein qui refuse à cette compilation l'attribution au géomètre alexandrin. De l'aveu même de M. Hultsch, la rédaction actuelle de ce petit Traité est d'une époque très postérieure; à mes yeux, son authenticité, même sous une forme plus ancienne, serait inadmissible, en raison, d'une part, de l'absence dans le recueil des définitions spéciales de la *Geometria* (*Héron*, p. 44-46), bien plus sûrement héroniennes, et, d'un autre côté, de la présence, au contraire, d'importants emprunts faits à Posidonius, comme il est facile de l'établir d'après Proclus (Geminus).

([1]) *Heronis Alexandrini Geometricorum et Stereometricorum reliquiæ.* Berlin, 1864. Nous citerons plus loin cette édition sous la rubrique (*Héron*).

([2]) *Metrologicorum scriptorum reliquiæ*, I. Leipzig, 1864, p. 13-18.

([3]) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik.* Leipzig, 1880, p. 320.

([4]) *L'Arithmétique des Grecs dans Héron d'Alexandrie* (*Mémoires de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, t. IV, 2e série).

Ces *Prolégomènes* doivent donc être écartés, et nous restons en présence de l'hypothèse d'un commentaire spécial. Nous allons la discuter en étudiant les fragments reproduits plus haut.

3. Le premier point à établir, c'est que Proclus n'a pas lui-même d'ouvrage héronien entre les mains; il cite d'après Porphyre et Pappus.

Tout auteur d'un commentaire travaille sur ceux de ses prédécesseurs, s'il en a eu. Proclus n'a, d'ailleurs, guère d'originalité; presque tout, chez lui, est évidemment emprunté, et s'il cite souvent ses auteurs, il néglige aussi souvent de le faire. La source principale pour les prologues est la *Théorie des Mathématiques* de Geminus: pour le commentaire des *Propositions*, c'est évidemment le travail de Pappus.

L'existence de ce commentaire est assurée par Eutocius (*Archimède* de Torelli, p. 90); il doit avoir été complet, car la citation du commentateur d'Archimède se rapporte au Livre XII des *Éléments*, et des quatre que fait Proclus, il en est deux (p. 189 et 197) qui sont relatives aux axiomes.

Proclus ne paraît point, d'ailleurs, connaître l'Ouvrage qui nous reste de Pappus, la *Collection mathématique;* mais ce dernier nous fait suffisamment connaître la riche érudition de son auteur pour que nous soyons assurés qu'il a pu emprunter ses citations de Héron à des ouvrages quelconques de ce dernier, de Géométrie ou même de Mécanique, sans se borner à rechercher dans les commentaires précédemment écrits sur Euclide s'il y en avait déjà de son temps.

Le fragment V, dans lequel le nom de Pappus se trouve accolé à celui des héroniens, nous rappelle cependant l'intéressante généralisation du théorème sur le carré de l'hypoténuse, qui forme la proposition I du Livre IV de la *Collection mathématique*.

Dans un triangle quelconque ABC, *sur deux côtés* AB, BC, *on construit des parallélogrammes quelconques* ABED, BCFH, *on prolonge leurs côtés* ED, FH *jusqu'à leur rencontre en* G, *on joint* GB, *et l'on construit sur le troisième côté* AC *du triangle un autre parallélogramme dont le second côté soit* GB, *sous un angle égal à* $\widehat{BAC} + \widehat{DGB}$. *Le troisième parallé-*

logramme sera équivalent à la somme des deux précédents.

Je suis tenté d'attribuer à Héron ce théorème, que Pappus aura pu reproduire également dans son commentaire, avec d'autres généralisations. Mais si l'on se croit obligé de prendre à la lettre ce que dit Proclus, la nécessité des théories du Livre VI pour ce qu'avait ajouté Pappus, on ne peut méconnaître dans cette adjonction un théorème qui figure dans les *Éléments* (VI, 31), que si l'on construit sur les côtés d'un triangle rectangle des figures semblables et semblablement placées, la figure sur l'hypoténuse est équivalente à la somme des figures sur les côtés de l'angle droit.

Si l'on examine, au reste, la contexture de ce Livre VI des *Éléments,* il est clair que le cadre logique en est rempli après l'exposition de la théorie générale de la παραβολή (solution géométrique des problèmes du second degré), c'est-à-dire après la proposition 30, application nécessaire de cette théorie. Les trois propositions qui clôturent le Livre dans sa forme actuelle n'ont aucun lien ni entre elles, ni avec les précédentes. Ce sont de véritables hors-d'œuvre, et l'on sait, d'ailleurs, que la moitié de la dernière proposition est due à Théon. On peut donc parfaitement admettre que ce soit à cet éditeur d'Euclide qu'il faille attribuer l'incorporation aux *Éléments* de ces trois propositions, dont il aurait emprunté au moins la première au commentaire de Pappus.

Originairement elle viendrait de l'école héronienne, et peut-être du maître lui-même. Mais nous verrons plus loin qu'elle aurait, dans ce cas, été énoncée dans son Traité de Géométrie beaucoup plus tôt que dans un commentaire sur Euclide.

4. En dehors de Pappus, Proclus invoque pour ses citations de Héron un autre garant, qui est Porphyre.

L'existence d'un commentaire de ce fécond polygraphe sur Euclide n'est point établie d'une façon précise; mais on peut la conclure des appels que fait Proclus à son autorité.

Si le premier (p. 56) se rapporte nommément aux Συμμίκτα (*Mélanges*), Ouvrage en sept Livres, d'après Suidas; si le second (p. 252) peut se référer à un écrit philosophique, il en est quatre autres à la suite desquels viennent des démonstrations tout à fait semblables à celles que l'on peut rencontrer dans un commentaire.

Nous savons, d'ailleurs, que Porphyre avait écrit des *Introductions astronomiques,* c'est-à-dire, en fait, commencé à commenter Ptolémée; il nous reste enfin de lui un commentaire sur les *Harmoniques* de ce dernier mathématicien. Pappus, d'un autre côté, un peu plus jeune que Porphyre, a pu le connaître; la tradition lui attribue d'avoir achevé le travail sur les *Harmoniques* (¹), et il a certainement commenté l'Almageste. Quoique la longue vie de Porphyre paraisse s'être surtout écoulée à Rome, tandis qu'on suppose mieux Pappus écrivant à Alexandrie, il n'en est pas moins dès lors naturel de voir dans le second, sinon le disciple, au moins l'héritier mathématique du premier, et l'on peut croire que le commentaire sur Euclide forma une partie de l'héritage.

Le travail de Porphyre connu de Proclus, soit directement, soit peut-être seulement par celui de Pappus, a-t-il été le premier? ou y a-t-il trace de commentaires antérieurs? Nous sommes, sur cette question, ramenés exclusivement soit à Héron, soit aux héroniens (οἱ περὶ Ἥρωνα).

Il est certain que, depuis qu'une école héronienne existait et publiait, sous le nom du maître, des traités et des recueils de problèmes sur la Géométrie pratique, en les mettant constamment au courant des changements des systèmes métriques, elle s'était habituée à les enrichir d'emprunts faits à Euclide (²) et à d'autres auteurs, d'abrégés et de compilations diverses. Ainsi a pu se constituer la fausse attribution à Héron du Traité des *Définitions,* dont j'ai parlé plus haut, parce que toutes les productions de l'école paraissaient sous le nom illustre du disciple de Ctésibios. Mais rien ne semble indiquer, dans cet ensemble de travaux, une tentative sérieuse de commenter les *Éléments.* Toutefois un érudit comme Porphyre, n'eût-il pas eu de valeur réelle comme géomètre, était suffisamment averti par l'existence de cette école, qu'il convenait, pour commenter Euclide, de faire des recherches dans les écrits de Héron, puisque ce dernier avait traité avec succès les mêmes sujets, suivant des tendances différentes. Porphyre, enfin,

---

(¹) *Voir* FABRICIUS, *Biblioth. græca,* éd. Harles, t. V, p. 740.
(²) *Voir,* nommément, *Héron,* p. 41-43 et p. 115.

n'avait sans doute pas besoin, comme modèle, d'un commentaire déjà existant.

5. Nous avons recherché à quelles sources Proclus emprunte, selon toute probabilité, ses citations de Héron. Il convient maintenant d'en rapprocher les données un peu précises que l'on possède sur le contenu de la *Géométrie* de cet auteur, dont ces citations peuvent découler originairement. Or, dans l'écrit héronien qui présente le plus de caractères de fidélité, l'*Introduction de Géométrie,* avant le tableau du système métrique, se termine comme suit (Héron, p. 46) :

« Voici quels sont, pour le métrage, les points de repère fixes :

» *a*. Dans tout triangle, la somme de deux côtés quelconques est supérieure au troisième.

» *b*. Dans tout triangle rectangle, la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.

» *c*. Dans tout cercle, la circonférence est $3\frac{1}{7}$ par rapport au diamètre.

» *d*. L'aire mesurée par le produit du diamètre et de la circonférence du cercle est égale à quatre cercles. »

Si Héron a réellement écrit une *Géométrie,* il s'est évidemment attaché à démontrer ces propositions et à en développer les conséquences.

Comme on le sait, les deux dernières sont dues à Archimède; il suffit de remarquer, en passant, que la Κύκλου μετρήσις (*Mesure du cercle*) du Syracusain qui nous a été conservée n'est qu'un extrait du Livre *Sur la circonférence du cercle,* aujourd'hui perdu, mais encore connu de Pappus, et que l'usage de faire cet extrait de la partie la plus importante peut dater du temps de Héron; le dernier éditeur, avant Eutocius, de la *Mesure du cercle,* le mécanicien Isidore de Milet, n'aura fait que continuer la tradition du mécanicien d'Alexandrie.

Quant aux deux premières propositions, elles sont tirées d'Euclide, et il est remarquable que les fragments conservés par Proclus, à l'exception de celui qui est relatif aux axiomes, se rapportent, II, III, IV à *a*, et V à *b*.

Nous avons déjà suffisamment parlé du fragment V; le fragment III est expressément la proposition *a* démontrée autrement que ne l'avait fait Euclide; II se rapporte à une proposition invoquée dans cette démonstration.

Quant à la relation du fragment IV, elle est moins claire, quoique la proposition *a* y soit invoquée, ce qui n'a pas lieu dans la démonstration correspondante d'Euclide; mais il appartient évidemment au même ordre d'idées : donner des règles permettant de contrôler la possibilité de figures auxquelles on suppose des dimensions déterminées.

Quant au fragment I — sur les axiomes —, peut-être la donnée a-t-elle été empruntée à Geminus, et non à Porphyre ou à Pappus; en tous cas, il n'est certainement pas tiré d'un commentaire, mais bien d'un traité original de Géométrie.

La conclusion de ces rapprochements serait donc négative en ce qui concerne l'existence d'un commentaire composé par Héron.

On peut, il est vrai, faire à cette conclusion une objection spécieuse tirée du fragment II. Le singulier renseignement historique qui s'y trouve ne semble, en effet, guère à sa place dans un traité didactique (1).

Mais c'est supposer que ce traité était conçu dans la forme euclidienne, et nous avons tout droit de penser le contraire. S'il y a, en effet, un fragment bien authentique de la *Géométrie* de Héron, c'est le début (Héron, p. 43 et 106), qui raconte, « suivant ce que nous apprend l'ancienne tradition », l'invention de la Géométrie chez les Egyptiens. C'est le ton d'un écrivain qui se plaît aux digressions historiques, ce n'est plus la sévère nudité des œuvres classiques.

En résumé, nous admettons les conclusions suivantes :

1° Il n'y a aucune raison plausible de supposer que Héron ait commenté Euclide.

---

(1) Le *Philippos* dont il y est parlé semble être le disciple de Platon, Philippe d'Oponte ou de Medma. Du moins on ne connaît aucun mathématicien postérieur du même nom. L'identité de ce personnage, sous les deux épithètes relatives à sa nationalité, a d'ailleurs été démontrée par Bœckh (*Sonnenkreise der Alten*, p. 34-40).

2° Les citations faites par Proclus, de seconde main, se rapportent à une *Géométrie* composée par le disciple de Ctésibios.

3° Cet Ouvrage, spécialement destiné à l'enseignement de l'arpentage, se bornait, quant aux démonstrations, aux théorèmes pratiquement utiles à connaître pour les élèves, tout en se complétant par de nombreuses applications numériques.

4° L'exposition des théories s'y trouvait agrémentée de remarques instructives et de renseignements historiques qui la différenciaient d'une pure série de propositions mathématiques.

5° Il est possible que ce soit par cette voie indirecte, aussi bien que par Geminus, que nous soient parvenues diverses données que Proclus a empruntées à Eudème, dont il ne semble pas avoir eu l'*Histoire* entre les mains.