P. APPELL

Sur une équation linéaire aux dérivées partielles

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 314-318
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_314_0>

MÉLANGES.

SUR UNE ÉQUATION LINÉAIRE AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

PAR M. P. APPELL.

L'équation différentielle linéaire

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{m(1-m)}{(x-y)^2}\,z,$$

à laquelle M. Darboux a consacré une Note si intéressante dans les *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* du 10 juillet 1882, peut être considérée comme un cas particulier de l'équation

$$(2)\qquad (x-y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - \beta'\frac{\partial u}{\partial x} + \beta\frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

que j'ai rencontrée dans la théorie des fonctions hypergéométriques de deux variables (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* séance du 29 mars 1880). En effet, si dans l'équation (1) on fait

$$z = (x-y)^m u,$$

cette équation prend la forme (2), où $\beta = \beta' = m$. Cette remarque m'a conduit à essayer d'étendre à l'équation (2) les principales propriétés indiquées par M. Darboux pour l'équation (1).

Tout d'abord, l'équation (2) ne change pas si l'on remplace respectivement x et y par

$$ax+b,\quad ay+b,$$

a et b étant des constantes quelconques. Elle ne change pas non plus si l'on y remplace x par $\frac{1}{x}$, y par $\frac{1}{y}$ et u par $x^\beta y^{\beta'} u$. En combinant ces deux propriétés, on voit que, si

$$u = \varphi(x,y)$$

est une solution de l'équation (2), la fonction

$$(ax+b)^{-\beta}(ay+b)^{-\beta'}\varphi\left(\frac{cx+d}{ax+b}, \frac{cy+d}{ay+b}\right),$$

en est une autre solution.

Cherchons maintenant les solutions fonctions du seul rapport $\frac{y}{x}$. Soit $\frac{y}{x} = t$; alors

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{du}{dt}\frac{y}{x^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{du}{dt}\frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} = -\frac{du}{dt}\frac{1}{x^2} - \frac{d^2 u}{dt^2}\frac{y}{x^3}.$$

Substituant ces expressions dans l'équation (2) et faisant en outre $y = tx$, on obtient l'équation

$$(3) \qquad t(1-t)\frac{d^2 u}{dt^2} + [(1-\beta) - (1+\beta')t]\frac{du}{dt} = 0,$$

qui admet l'intégrale

$$u = t^\beta F(\beta, \beta+\beta', \beta+1, t),$$

le signe F désignant, comme il est d'usage, la série hypergéométrique de Gauss. L'équation (2) admet donc la solution

$$(3) \qquad u = \left(\frac{y}{x}\right)^\beta F\left(\beta, \beta+\beta', \beta+1, \frac{y}{x}\right)$$

et, par raison de symétrie, la solution

$$(3') \qquad u = \left(\frac{x}{y}\right)^{\beta'} F\left(\beta', \beta+\beta', \beta'+1, \frac{x}{y}\right).$$

Les deux solutions précédentes sont des cas particuliers des solutions

$$(4) \qquad u = x^{-\beta} y^\mu F\left(\beta, \mu+\beta', \mu+1, \frac{y}{x}\right),$$

$$(4') \qquad u = x^\lambda y^{-\beta'} F\left(\beta', \lambda+\beta, \lambda+1, \frac{x}{y}\right),$$

dans lesquelles λ et μ sont des constantes arbitraires. Les solutions (3) et (3′) s'obtiennent en faisant $\mu = \beta$ et $\lambda = \beta'$; et la solution de l'équation (1),

$$z = \left(1 - \frac{y}{x}\right)^m F\left(m, m, 1, \frac{y}{x}\right),$$

indiquée par M. Darboux, s'obtient en faisant dans (4)

$$\mu = 0, \quad \beta = \beta' = m.$$

Cherchons maintenant la solution entière la plus générale de l'équation (2). Employons, à cet effet, la méthode des coefficients indéterminés et cherchons à vérifier l'équation (2) par la série

$$u = \sum_{m,n=0}^{m,n=\infty} A_{m,n} x^m y^n; \tag{5}$$

on trouve, pour déterminer les coefficients $A_{m,n}$, l'équation

$$(m+1)(n+\beta')A_{m+1,n} = (n+1)(m+\beta)A_{m,n+1},$$

d'où

$$A_{m,n} = \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+m-1)\beta'(\beta'+1)\ldots(\beta'+n-1)}{1.2\ldots m.\ 1.2\ldots n}\psi(m+n), \tag{6}$$

ψ étant une fonction arbitraire. En particulier, si l'on prend

$$\psi(m+n) = \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+m+n-1)}{\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+m+n-1)},$$

on obtient comme solution la série hypergéométrique de deux variables désignée par

$$F_1(\alpha, \beta, \beta', \gamma, x, y).$$

On voit que l'équation (2) admet toujours pour solution *des polynômes en nombre infini de tous les degrés*. Il suffit en effet, pour que la solution (5) donne un polynôme de degré N, d'assujettir la fonction arbitraire $\psi(m+n)$ qui figure dans (6) à la condition

$$\psi(m+n) = 0 \quad \text{pour} \quad m+n > N;$$

pour cela on pourra, par exemple, poser

$$\psi(m+n) = N(N-1)\ldots(N-m-n+1)\varpi(m+n),$$

la fonction ϖ étant arbitraire.

Dans le cas particulier où les deux nombres β et β' sont des *entiers négatifs*, toutes les solutions données par la série (5), $A_{m,n}$ ayant la valeur (6), sont des polynômes; en effet, si

$$\beta = -N, \quad \beta' = -N',$$

on a $A_{m,n} = 0$ pour toutes les valeurs de m et n satisfaisant aux conditions

$$m > N, \quad n > N'.$$

D'une façon générale, désignons par $u(\beta, \beta')$ une solution de l'équation (2); on aura

$$(7) \qquad \begin{cases} u(\beta+1, \beta') = \dfrac{\partial u(\beta, \beta')}{\partial x}, \\ u(\beta, \beta'+1) = \dfrac{\partial u(\beta, \beta')}{\partial y}; \end{cases}$$

c'est-à-dire que, si $u(\beta, \beta')$ est une solution de l'équation (2), $\dfrac{\partial u(\beta, \beta')}{\partial x}$ est une solution de l'équation (2) où l'on a remplacé β par $\beta+1$, et $\dfrac{\partial u(\beta, \beta')}{\partial y}$ une solution de cette même équation où l'on a remplacé β' par $\beta'+1$. Pour le démontrer, il suffit de différentier le premier membre de l'équation (2) par rapport à x ou à y.

La propriété exprimée par les équations (7) conduit à l'intégrale générale de l'équation (2) quand β et β' sont des *entiers positifs* : $\beta = m$, $\beta' = n$.

Remarquons, en effet, que si $\beta = \beta' = 1$, l'intégrale générale de l'équation (2) est

$$u(1, 1) = \frac{X - Y}{x - y},$$

X étant une fonction de x seul et Y de y seul. Alors, d'après (7),

$$u(2, 1) = \frac{\partial\left(\dfrac{X-Y}{x-y}\right)}{\partial x},$$

et

$$u(m, n) = \frac{\partial^{m+n-2}}{\partial x^{m-1}\,\partial y^{n-1}}\left(\frac{X-Y}{x-y}\right).$$

Telle est donc l'expression de l'intégrale générale quand β et β' sont des entiers positifs m et n. Le cas où β et β' sont des entiers négatifs se ramène immédiatement au précédent. En effet, si, dans l'équation (2), on fait

$$(8) \qquad u = (x-y)^{1-\beta-\beta'}\,t,$$

cette équation prend la forme

$$(9) \qquad (x-y)\frac{\partial^2 t}{\partial x\,\partial y} - (1-\beta)\frac{\partial t}{\partial x} + (1-\beta')\frac{\partial t}{\partial y} = 0,$$

c'est-à-dire la forme (2), où β et β' sont changés respectivement en $1-\beta'$ et $1-\beta$. Si donc β et β' sont des entiers négatifs, $1-\beta$ et $1-\beta'$ sont des entiers positifs et l'intégrale t de l'équation (9) est donnée par la formule établie précédemment.

Supposons enfin que, β' étant quelconque, β soit un entier que l'on pourra toujours supposer positif à cause de la transformation (8). En supposant d'abord $\beta = 1$, on voit que l'intégrale générale de l'équation (2) est

$$u(1, \beta') = (x-y)^{-\beta'} \left[\int Y(x-y)^{\beta'-1}\, dy + X \right];$$

et, par suite,

$$u(m, \beta') = \frac{\partial^{m-1} u(1, \beta')}{\partial x^{m-1}},$$

m étant entier. On a une formule analogue si, β étant quelconque, β' est entier.

Lorsque les nombres β et β' sont quelconques, on peut, par la transformation (8) et l'application répétée des formules (7), ramener ces deux nombres à avoir leurs parties réelles comprises entre 0 et 1. On obtient alors l'expression suivante de l'intégrale générale :

$$u = \int_x^y \varphi(\alpha)(y-\alpha)^{-\beta'}(\alpha - x)^{-\beta}\, d\alpha$$
$$+ (x-y)^{1-\beta-\beta'} \int_x^y \psi(\alpha)(y-\alpha)^{\beta-1}(\alpha - x)^{\beta'-1}\, d\alpha,$$

φ et ψ désignant des fonctions arbitraires.