Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

C. Weierstrass

Recherches sur les fonctions $2r$ fois périodiques de r variables. (Lettres de M. C. Weierstrass à M. C.-W. Borchardt)

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 6, nº 1 (1882), p. 111-120

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1882_2_6_1_111_0>

MÉLANGES.

RECHERCHES SUR LES FONCTIONS $2r$ FOIS PÉRIODIQUES DE r VARIABLES.

(Lettres de M. C. Weierstrass à M. C.-W. Borchardt.)

Traduction publiée avec l'autorisation de l'auteur,

Par M. J. MOLK.

Première Lettre (1).

Dans les *Monatsberichte* de notre Académie (1869, p. 855), tu trouveras énoncé le théorème :

Si l'on désigne par $f(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ une fonction univoque (2), *$2r$ fois périodique, ayant le caractère d'une fonction rationnelle pour toutes les valeurs finies des r variables $u_1, \ldots, u_r$; toute autre fonction, jouissant de ces propriétés et ayant les mêmes systèmes de périodes, peut être exprimée rationnellement à l'aide des $(r+1)$ fonctions $f_1, \frac{\partial f_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial u_r}$, ces dernières étant liées par une équation algébrique.*

Ce théorème, cher ami, correspond, comme tu le vois, à celui de M. Liouville, d'après lequel, $f_1(u)$ étant une fonction univoque doublement périodique, à deux infinis, toute autre fonction univoque $f(u)$, ayant les mêmes périodes que $f_1(u)$ et un nombre quelconque d'infinis, peut être mise sous la forme

$$f(u) = \frac{M + N f_1'(u)}{L},$$

L, M, N désignant des fonctions rationnelles entières de $f_1(u)$.

---

(1) *Journal für Mathematik*, t. LXXXIX.

(2) Je me suis permis de traduire *eindeutig* par *univoque*, le mot *uniforme* me semblant devoir être réservé pour exprimer l'idée fondamentale de *Gleichmässigkeit; gleichmässige Convergenz* = convergence uniforme. Comparez : *Remarques sur quelques points de la théorie des fonctions analytiques par M. C. Weierstrass*. Traduction par M. J. Tannery. Paris, 1882.

La différence consiste seulement en ce que, d'après mon théorème, $f(u)$ peut être exprimée rationnellement en fonction de $f_1(u)$ et de $f_1'(u)$, $f_1(u)$ étant une fonction quelconque de l'espèce considérée, ayant les mêmes périodes que $f(u)$. On peut d'ailleurs facilement déduire ce théorème de celui de M. Liouville.

L'énoncé que je viens de donner est à peu près celui des *Monatsberichte,* mais il demande à être modifié.

Je dirai que toutes les fonctions univoques $2r$ fois périodiques $f(u_1, \ldots, u_r)$, ayant le caractère d'une fonction rationnelle pour tout système fini des variables $u_1, \ldots, u_r$, font partie d'une même *classe*. J'énoncerai alors le théorème en question de la manière suivante :

Toutes les fonctions $f(u_1, \ldots, u_r)$, faisant partie d'une classe déterminée, peuvent être exprimées rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles $f_1(u_1, \ldots, u_r)$ et de ses dérivées partielles $\frac{\partial f_1}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f_1}{\partial u_r}$. Le choix de f_1 est, en général, arbitraire; il peut cependant se faire que l'on ait à exclure certaines fonctions de la classe considérée. Chaque fonction f est liée à ses r dérivées $\frac{\partial f}{\partial u_1}, \frac{\partial f}{\partial u_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_r}$ par une équation algébrique.

Ce théorème n'est d'ailleurs qu'un cas particulier d'un autre plus général que je vais te communiquer. Mais il me semble nécessaire d'en faire précéder l'énoncé par quelques remarques ayant pour but de fixer exactement le caractère des fonctions auxquelles il se rapporte.

M. Liouville désigne, dans les *Leçons* que tu as rédigées [1], les fonctions qui font l'objet de ses recherches par *fonctions bien déterminées,* sans préciser davantage ce qu'il faut entendre par là. Mais il résulte des hypothèses qu'il fait dans la démonstration de ses théorèmes, et des résultats qu'il obtient, qu'il a toujours en vue des fonctions univoques d'une variable, n'ayant aucun point essentiel fini [2]. En effet, ses théorèmes n'ont plus lieu pour d'au-

---

(1) *Journal für Mathematik,* t. LXXXVIII.

(2) Pour la terminologie employée par M. Weierstrass, consulter son Mémoire : *Zur Theorie der eindeutigen Functionen,* traduit par M. Picard (*Annales de l'École Normale supérieure,* 1871).

tres fonctions univoques. Par exemple,

$$F(u) = e^{\sin \operatorname{am} u}$$

est univoque et doublement périodique; cependant, on ne peut exprimer $F(u)$ rationnellement en fonction de $\sin \operatorname{am} u$ et de

$$\frac{d \sin \operatorname{am} u}{du}.$$

Cela tient à ce que tous les arguments u, pour lesquels

$$\sin \operatorname{am} u = \infty,$$

sont des points essentiellement singuliers de $e^{\sin \operatorname{am} u}$. En effet, le développement de $F(u)$ suivant les puissances entières de $(u - a)$ contient un nombre infini de termes à exposant négatif. Si donc on veut étendre les théorèmes de M. Liouville sur les fonctions doublement périodiques d'une variable au cas de fonctions $2r$ fois périodiques de r variables, il est manifeste que ce ne sera possible que pour des fonctions jouissant de propriétés particulières.

Définitions. — Lorsque je considère simultanément les variables $u_1, \ldots, u_r$, je nomme, pour abréger, chaque système de valeurs de ces variables un *point* dans le *domaine* de $u_1, \ldots, u_r$; $(a_1, \ldots, a_r)$ étant un point déterminé du domaine, et δ un nombre réel positif donné, l'ensemble des valeurs pour lesquelles

$$|u_k - a_k| < \delta, \quad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

forme le *voisinage* (δ) du point $(a_1, \ldots, a_r)$. Dans le cas où la valeur de δ n'est point fixée à l'avance, je parlerai simplement du *voisinage* de $(a_1, \ldots, a_r)$. Enfin, je conviens de remplacer $u - \infty$ par $\frac{1}{u}$.

Lorsqu'une fonction univoque $f(u_1, \ldots, u_r)$ peut être représentée dans le voisinage d'un point $(a_1, \ldots, a_r)$ par une série convergente de la forme

$$\sum A_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_r} (u_1 - a_1)^{\nu_1} (u_2 - a_2)^{\nu_2} \ldots (u_r - a_r)^{\nu_r} \quad (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r = 0, 1, \ldots, \infty),$$

je dirai que cette fonction A *régulière* au point $(a_1, \ldots, a_r)$

$\nu_1, \ldots, \nu_r$ sont des nombres entiers positifs, et les coefficients $A_{\nu_1,\ldots,\nu_r}$ sont indépendants de $u_1, \ldots, u_r$.

Dans toute considération où la forme de la série joue seule un rôle et où la valeur des coefficients est indifférente, je désignerai cette série par

$$P(u_1 - a_1, \ldots, u_r - a_r)$$

ou par

$$P(u_1, \ldots, u_r \mid a_1, \ldots, a_r).$$

L'ensemble des points où une fonction $f(u_1, \ldots, u_r)$ est régulière forme un *continuum* de $2r$ dimensions, qui est nécessairement limité. Tout point $(a'_1, \ldots, a'_r)$ situé sur la limite du *continuum* est un point *singulier* de la fonction considérée.

Il peut arriver que le produit de $f(u_1, \ldots, u_r)$ par une série entière $P_0(u_1, \ldots, u_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)$, qui s'annule pour

$$u_1 = a'_1, \ldots, u_r = a'_r,$$

soit une fonction régulière au point $(a'_1, \ldots, a'_r)$. Alors, pour tous les points $(u_1, \ldots, u_r)$ situés dans le voisinage de $(a'_1, \ldots, a'_r)$, on peut mettre $f(u_1, \ldots, u_r)$ sous la forme

$$\frac{P_1(u_1, \ldots, u_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)}{P_0(u_1, \ldots, u_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)}.$$

Dans ce cas, nous dirons que $(a'_1, \ldots, a'_r)$ est un *point singulier non essentiel*. Dans tout autre cas, ce point singulier est *essentiel*.

Pour $r > 1$, il importe de distinguer entre ces deux genres bien différents de points singuliers non essentiels.

Si $(a'_1, \ldots, a'_r)$ désigne l'un de ces points, on peut toujours représenter $f(u_1, \ldots, u_r)$ par un quotient

$$\frac{P_1(u_1, \ldots, u_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)}{P_0(u_1, \ldots, u_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)},$$

tel que les séries entières P_0 et P_1 ne soient pas toutes deux divisibles par une série entière $P(u_1, \ldots, u_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)$ s'annulant pour $u_1 = a'_1, \ldots, u_r = a'_r$.

Mais alors, si $P_1(a'_1, \ldots, a'_r \mid a'_1, \ldots, a'_r)$ n'est pas nulle, il est manifeste que la valeur de $f(u_1, \ldots, u_r)$ est infiniment grande pour tous les points $(u_1, \ldots, u_r)$ situés dans un voisinage infiniment petit de $(a'_1, \ldots, a'_r)$ (1); et, par suite, que $f(a'_1, \ldots, a'_r) = \infty$.

Si, au contraire, $P_1(a'_1, \ldots, a'_r \mid a'_1, \ldots, a'_r) = 0$, on peut démontrer qu'il existe, quelque petit que soit δ, dans le voisinage (δ) de $(a'_1, \ldots, a'_r)$, des points $(u_1, \ldots, u_r)$ tels que $f(u_1, \ldots, u_r)$ ait une valeur quelconque fixée à l'avance. Alors $f(a'_1, \ldots, a'_r)$ n'a aucune valeur déterminée.

Remarquons encore que l'ensemble des points où $f(u_1, \ldots, u_r)$ se comporte comme une fonction rationnelle, c'est-à-dire l'ensemble de ses points non singuliers et singuliers non essentiels, est un *continuum* à $2r$ dimensions dont la limite est formée par les points singuliers essentiels de la fonction.

Si $(a_1, \ldots, a_r)$ est un point déterminé à l'intérieur du *continuum* et si $f(a_1, \ldots, a_r)$ a une valeur finie bien déterminée, $f(u_1, \ldots, u_r)$ est une fonction *régulière* pour tous les points situés dans un voisinage déterminé de $(a_1, \ldots, a_r)$.

Si $f(a_1, \ldots, a_r) = \infty$, $r > 1$, il y a dans tout voisinage de $(a_1, \ldots, a_r)$ qui ne contient aucun point singulier de la fonction

$$\frac{1}{f(u_1, \ldots, u_r)}$$

un nombre infini de points, formant une variété $(2r-2)^{\text{ième}}$, où la fonction $f(u_1, \ldots, u_r)$ a une valeur infiniment grande, tandis qu'elle est régulière en tout autre point du domaine considéré.

Si enfin $f(a_1, \ldots, a_r)$ n'a aucune valeur déterminée, il y a non seulement dans le voisinage (δ) de $(a_1, \ldots, a_r)$ un nombre infini d'autres points singuliers non essentiels où la fonction $f(u_1, \ldots, u_r)$ a la valeur ∞, mais encore pour $r > 2$, un nombre infini de points où elle est indéterminée; et cela, quelque petit que soit δ. Les premiers forment une variété $(2r-2)^{\text{ième}}$; les derniers, une variété $(2r-4)^{\text{ième}}$.

J'ajoute à ce qui précède l'énoncé d'un théorème fondamental dont je ne ferai usage que plus tard.

---

(1) C'est-à-dire que, quelque grand que soit un nombre donné G, on peut toujours déterminer un δ assez petit pour que, pour tous les points $(u'_1, \ldots, u'_r)$ du voisinage (δ) de $(a'_1, \ldots, a'_r)$, la valeur de $|f(u'_1, \ldots, u'_r)|$ soit plus grande que G.

Une fonction univoque $f(u_1, \ldots, u_r)$ n'ayant aucun point essentiellement singulier dans tout le domaine des variables $u_1, \ldots, u_r$, est une fonction rationnelle.

J'ai démontré ce théorème pour des fonctions d'*une* variable dans mon Mémoire cité tout à l'heure; pour des fonctions de *plusieurs* variables, la démonstration n'est pas de beaucoup aussi simple qu'il le semble au premier instant.

Je désire, enfin, appeler ton attention sur un dernier point.

Si, par un procédé quelconque, on forme à l'aide de r variables $u_1, \ldots, u_r$ un *continuum* à $2r$ dimensions, on peut toujours déterminer des fonctions univoques de $u_1, \ldots, u_r$, se comportant comme des fonctions rationnelles en tous les points situés à l'intérieur de ce *continuum,* et en aucun des points de sa limite. Les points singuliers essentiels d'une fonction univoque de r variables ne sont donc pas nécessairement isolés; il est, au contraire, possible qu'ils soient représentés par un ou plusieurs des complexes (1) que l'on peut former dans le domaine des r variables imaginaires.

Après ces remarques préliminaires, dont je compte faire souvent usage, je conviens, pour abréger, d'entendre par fonction $2r$ fois périodique de r variables, non seulement une fonction univoque, mais encore une fonction n'ayant aucun point essentiel fini.

Ceci posé, je démontre qu'il est possible, d'une infinité de manières, d'adjoindre à une fonction quelconque $f_1(u_1, \ldots, u_r)$, $2r$ fois périodique, d'autres fonctions

$$f_2(u_1, \ldots, u_r), \quad f_3(u_1, u_2, \ldots, u_r), \quad \ldots, \quad f_r(u_1, u_2, \ldots, u_r),$$

faisant partie de la même *classe* que f_1, et telles que le déterminant fonctionnel

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, r)$$

ne soit pas identiquement nul, c'est-à-dire telles que $f_1, f_2, \ldots, f_r$ soient indépendantes les unes des autres.

J'ai montré, dans un Mémoire publié dans les *Monatsberichte* (1876, p. 687) et intitulé *Nouvelle démonstration d'un théo-*

---

(1) Gebilde.

rème fondamental de la théorie des fonctions périodiques de plusieurs variables, que lorsque f_1 jouit des propriétés que nous lui avons supposées, le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(u_1, \ldots, u_r)}{\partial u_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1(u_1, \ldots, u_r)}{\partial u_r} \\ \dfrac{\partial f_1(u'_1, \ldots, u'_r)}{\partial u'_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1(u'_1, \ldots, u'_r)}{\partial u'_r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_1(u_1^{(r-1)}, \ldots, u_r^{(r-1)})}{\partial u_1^{r-1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1(u_1^{(r-1)}, \ldots, u_r^{(r-1)})}{\partial u_r^{r-1}} \end{vmatrix}$$

n'était pas identiquement nul.

Si donc nous désignons par $c'_1, \ldots, c'_r; \ldots; c_1^{(r-1)}, \ldots, c_r^{(r-1)}$ des constantes par rapport à $u_1, \ldots, u_r$, et si nous posons

$$u'_\alpha = u_\alpha + c'_\alpha; \ \ldots; \ u_\alpha^{(r-1)} = u_\alpha + c_\alpha^{(r-1)} \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, r),$$

nous pouvons donner à $c'_\alpha, \ldots, c_\alpha^{(r-1)}$ des valeurs telles que le déterminant

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(u_1, \ldots, u_r)}{\partial u_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1(u_1, \ldots, u_r)}{\partial u_r} \\ \dfrac{\partial f_1(u_1 + c'_1, \ldots, u_r + c'_r)}{\partial u_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1(u_1 + c'_1, \ldots, u_r + u'_r)}{\partial u_r} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial f_1(u_1 + c_1^{(r-1)}, \ldots, u_r + c_r^{(r-1)})}{\partial u_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial f_1(u_1 + c_1^{(r-1)}, \ldots, u_r + c_r^{(r-1)})}{\partial u_r} \end{vmatrix}$$

ne soit pas identiquement nul.

Choisissons alors $f_2(u_1, \ldots, u_r) = f_1(u_1 + c'_1, \ldots, u_r + c'_r); \ldots;$ $f_r(u_1, \ldots, u_r) = f_1(u_1 + c_1^{(r-1)}, \ldots, u_r + c_r^{(r-1)})$. Il est manifeste que les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_r$ ont mêmes systèmes de périodes, et que leur déterminant fonctionnel n'est pas identiquement nul.

Soit maintenant $f_1(u_1, \ldots, u_r), \ldots, f_r(u_1, \ldots, u_r)$ un système quelconque de r fonctions indépendantes les unes des autres, et faisant partie de la même classe.

On peut démontrer ce théorème :

Supposons que les r variables $u_1, \ldots, u_r$ soient liées aux va-

riables $s_1, s_2, \ldots, s_r$ *par les* r *équations*

$$f_1(u_1, \ldots, u_r) = s_1, \quad f_2(u_1, \ldots, u_r) = s_2, \quad \ldots, \quad f_r(u_1, \ldots, u_r) = s_r.$$

Si l'on fait abstraction de systèmes particuliers $(s_1, s_2, \ldots, s_r)$ *qui ne forment qu'une variété* $(2r-2)^{\text{ième}}$, *à chaque système de valeurs* $s_1, s_2, \ldots, s_r$ *correspond une infinité de points* $(u_1, \ldots, u_r)$ *ne faisant partie, ni des points singuliers des fonctions* $f_1, \ldots, f_r$, *ni des points pour lesquels le déterminant fonctionnel*

$$\left| \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right| \quad (i, k = 1, 2, \ldots, r)$$

est nul. Mais, si nous groupons les points $(u_1, \ldots, u_r)$ *correspondant à un même système* $(s_1, \ldots, s_r)$, *de manière que deux points* $(u'_1, \ldots, u'_r)$ *et* $(u''_1, \ldots, u''_r)$ *fassent partie du même groupe ou de groupes différents, selon que les différences* $u''_1 - u'_1, \ldots, u''_r - u'_r$ *forment un système de périodes des fonctions* f, *ou non, « le nombre* m *de ces groupes est fini et ne dépend pas du système* $s_1, \ldots, s_r$ *choisi ». Je nomme ce nombre* m *le* degré *du système de fonctions* $f_1, \ldots, f_r$.

Ce théorème démontré, on en déduit les suivants :

Désignons par $f(u_1, \ldots, u_r)$ *une fonction* $2r$ *fois périodique dont les systèmes de périodes contiennent tous ceux des fonctions* $f_1, \ldots, f_r$ (¹).

f *est liée à* $f_1, \ldots, f_r$ *par une équation irréductible dont le degré par rapport à* f *est égal à* m *ou à un diviseur de* m.

Entre toutes les fonctions $2r$ *fois périodiques de la classe à laquelle appartiennent* $f_1, \ldots, f_r$, *il y en a une infinité qui sont liées à* $f_1, \ldots, f_r$ *par une équation irréductible de degré* m. *Si* f_{r+1} *désigne l'une de ces fonctions,* $f(u_1, \ldots, u_r)$ *peut être exprimée rationnellement en fonction de* $f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}$.

Les dérivées de $f_1, \ldots, f_{r+1}$ font partie de la classe de ces fonc-

(¹) Il n'est point dit que les systèmes de périodes de f ne contiennent que ceux des fonctions $f_1, \ldots, f_r$.

tions. Si, donc R, R_1, ..., R_r désignent des fonctions rationnelles de f_1, ..., f_{r+1}, et si l'on pose

$$f = R(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}),$$

on a aussi

$$\frac{\partial f}{\partial u_k} = R_k(f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}) \quad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

On peut élimier $f_1, f_2, \ldots, f_{r+1}$ entre ces $(r+1)$ équations et celle qui lie f_{r+1} à $f_1, f_2, \ldots, f_r$. On obtient ainsi, en général, f_k exprimée en fonction rationnelle de

$$f, \frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_r}.$$

C'est le théorème que j'énonçais en commençant.

Je n'ai point recherché les conditions auxquelles doit satisfaire $R(f_1, \ldots, f_{r+1})$ pour que $f_1, \ldots, f_{r+1}$ puissent être vraiment exprimés rationnellement en fonction de f et de ses dérivées

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial u_r}.$$

C'est pourquoi j'ai dû modifier l'énoncé donné dans les *Monatsberichte*.

Le premier de ces théorèmes, qui permet de donner la définition du *degré* d'un système de r fonctions $2r$ fois périodiques, indépendantes les unes des autres et faisant partie de la même classe, est le plus difficile à démontrer. Cela vient principalement de ce que, pour $r > 1$, il existe dans le domaine de $(u_1, \ldots, u_r)$ des points singuliers où les fonctions $f_1, \ldots, f_{r+1}$ sont toutes ou en partie indéterminées.

Si tu veux bien me permettre de continuer à te communiquer mes résultats, je t'exposerai, dans une autre Lettre, la voie que j'ai suivie pour démontrer les théorèmes énoncés. Elle n'est point courte, il est vrai, mais je crois les démonstrations parfaitement rigoureuses. Elle m'a, d'ailleurs, amené au but que j'avais en vue dès le début de mes recherches : *montrer que toute fonction $f(u_1, \ldots, u_r)$ de l'espèce considérée peut être exprimée ration-*

nellement à l'aide d'un certain nombre de fonctions

$$\mathfrak{I}(v_1, \ldots, v_r)_\lambda \text{ (1)},$$

ayant toutes les mêmes modules, et dont les arguments $v_1, \ldots, v_r$ *sont fonctions linéaires et homogènes de* $u_1, u_2, \ldots, u_r$.