

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

JOSEPH PEROTT

Sur la sommation des nombres φ

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série,
tome 5, n° 1 (1881), p. 37-40

http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1881_2_5_1_37_0

© Gauthier-Villars, 1881, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LA SOMMATION DES NOMBRES φ ;

PAR M. JOSEPH PEROTT.

Soit h un nombre entier quelconque; on désigne par $\varphi(h)$ le nombre qui indique combien il y a de nombres premiers à h et non supérieurs à h . Si l'on donne à h les valeurs successives

$$(1) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, \dots, N, \dots,$$

on obtient les nombres φ correspondants

$$(2) 1, 1, 2, 2, 4, 2, 6, 4, 6, 4, 10, 4, 12, 6, 8, 8, 16, 6, 8, 8, \dots, \varphi(N), \dots$$

On voit que la série (2) est des plus irrégulières. Si cependant, au lieu de considérer chaque terme de la série isolément, on prend la somme des N premiers termes, le rapport de cette somme à celle des termes correspondants de la série (1) tend de plus en plus vers une limite constante à mesure qu'on fait croître le nombre N . La démonstration de cette propriété des nombres φ fait l'objet du présent travail.

Un terme quelconque $\varphi(h)$ de la série (2) pouvant être considéré comme indiquant le nombre de fractions irréductibles de dénominateur h , la somme des N premiers termes de la série donnera le nombre de toutes les fractions dont les dénominateurs ne surpassent pas N . Or il est clair qu'on pourra aussi arriver à la connaissance du nombre de ces fractions en partant de la considération de leurs numérateurs. Le nombre de fractions de numérateur k sera évidemment

$$\varphi(N, k) - \varphi(k - 1, k),$$

$\varphi(N, k)$ désignant la quantité de nombres non supérieurs à N et premiers à k .

On aura, par conséquent,

$$\sum_{h=1}^{h=N} \varphi(h) = \sum_{k=1}^{k=N} \varphi(N, k) - \sum_{k=2}^{k=N} \varphi(k) = \Phi(N);$$

donc

$$\sum_{h=1}^{h=N} \varphi(h) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k=N} \varphi(N, k).$$

Mais nous avons

$$\varphi(N, k) = N - \sum E\left(\frac{N}{p_l}\right) + \sum E\left(\frac{N}{p_l p_m}\right) - \dots,$$

la sommation s'étendant à tous les facteurs premiers de k .

Par conséquent,

$$(3) \quad \sum_{h=1}^{h=N} \varphi(h) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left\{ N^2 - \sum \left[E\left(\frac{N}{p_l}\right) \right]^2 + \sum \left[E\left(\frac{N}{p_l p_m}\right) \right]^2 - \dots \right\};$$

car chaque terme $E\left(\frac{N}{p_l p_m p_n \dots}\right)$ figure juste autant de fois dans

la somme $\sum_{k=1}^{k=N} \varphi(N, k)$ qu'il y a de nombres non supérieurs à N et divisibles par $p_l p_m p_n \dots$. Les symboles E de Legendre s'annulant, du reste, toutes les fois que l'argument devient moindre que l'unité, la série (3) s'arrêtera d'elle-même.

Divisons maintenant les deux membres de la formule (3) par N^2 ; nous aurons

$$\frac{\sum_{h=1}^{h=N} \varphi(h)}{N^2} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{N^2} + 1 - \frac{\sum \left[E\left(\frac{N}{p_l}\right) \right]^2}{N^2} + \frac{\sum \left[E\left(\frac{N}{p_l p_m}\right) \right]^2}{N^2} - \dots \right\}$$

ou, en posant $E\left(\frac{N}{p_l p_m p_n \dots}\right) = \frac{N}{p_l p_m p_n \dots} - \theta_{l, m, n, \dots}$,

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{h=1}^{h=N} \varphi(h)}{N^2} &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{N^2} + 1 - \sum \frac{1}{p_l^2} + \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2} - \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2 p_n^2} \right. && (\text{les dén. } D \leq N^2) \\ &+ \frac{2}{N} \left(\sum \frac{\theta_l}{p_l} - \sum \frac{\theta_{l, m, n}}{p_l p_m} + \sum \frac{\theta_{l, m, n}}{p_l p_m p_n} - \dots \right) && (D \leq N) \\ &\quad \left. - \sum \frac{\theta_l^2}{N^2} + \sum \frac{\theta_{l, m}}{N^2} - \sum \frac{\theta_{l, m, n}^2}{N^2} + \dots \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \sum \frac{1}{p_l^2} + \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2} - \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2 p_n^2} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{1}{2N^2} + \frac{\xi}{N} \left(1 + \sum \frac{1}{p_l} + \sum \frac{1}{p_l p_m} + \sum \frac{1}{p_l p_m p_n} + \dots \right), \end{aligned}$$

où ξ est un nombre moindre que l'unité en valeur absolue.

Mais l'on a toujours

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{N} < \left(\frac{N}{N-1}\right)^N \log N < \frac{N}{N-1} e \log N;$$

par conséquent,

$$\frac{\Phi(N)}{N^2} = \frac{1}{2} \left(1 - \sum \frac{1}{p_l^2} + \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2} - \sum \frac{N=1}{p_l^2 p_m^2 p_n^2} + \dots \right) \quad (D \leq N^2)$$

$$+ \frac{1}{2N^2} + \frac{\xi_1 e \log N}{N-1};$$

donc

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Phi(N)}{N^2} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Phi(N)}{N(N+1)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} 1 - \sum \frac{1}{p_l^2} + \sum \frac{1}{p_l^2 p_m^2} \quad (D \leq N^2)$$

$$= \frac{3}{\pi^2} = 0,30396\ 35509\ 27013\ 31433.$$

Le Tableau suivant permettra de juger de l'approximation avec laquelle la fonction $\frac{3N^2}{\pi^2}$ représente les valeurs du symbole $\Phi(N)$ pour les cent premiers nombres naturels :

N	$\Phi(N)$	$\frac{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}{2} + \frac{1}{4} \left[1 - (-1)^{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)} \right]$	N	$\Phi(N)$	$\frac{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}{2} + \frac{1}{4} \left[1 - (-1)^{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)} \right]$
1	1	0	17	96	88
2	2	1	18	102	99
3	4	3	19	120	110
4	6	5	20	128	122
5	10	8	21	140	134
6	12	11	22	150	147
7	18	15	23	172	161
8	22	19	24	180	175
9	28	25	25	200	190
10	32	30	26	212	205
11	42	37	27	230	222
12	46	44	28	242	238
13	58	51	29	270	256
14	64	60	30	278	274
15	72	68	31	308	292
16	80	78	32	324	311

N	$\Phi(N)$	$\frac{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}{2} + \frac{1}{4}\left[1 - (-1)^{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}\right]$	N	$\Phi(N)$	$\frac{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}{2} + \frac{1}{4}\left[1 - (-1)^{E\left(\frac{6N^2}{\pi^2}\right)}\right]$
33	344	331	67	1394	1364
34	360	351	68	1426	1406
35	384	372	69	1470	1447
36	396	394	70	1494	1489
37	432	416	71	1564	1532
38	450	439	72	1588	1576
39	474	462	73	1660	1620
40	490	486	74	1696	1666
41	530	511	75	1736	1710
42	542	536	76	1772	1756
43	584	562	77	1832	1802
44	604	588	78	1856	1849
45	628	616	79	1934	1897
46	650	643	80	1966	1945
47	696	671	81	2020	1994
48	712	700	82	2060	2044
49	754	730	83	2142	2094
50	774	760	84	2166	2145
51	806	791	85	2230	2196
52	830	822	86	2272	2248
53	882	854	87	2328	2301
54	900	886	88	2368	2354
55	940	919	89	2456	2408
56	964	953	90	2480	2462
57	1000	988	91	2552	2517
58	1028	1023	92	2596	2573
59	1086	1058	93	2656	2629
60	1102	1094	94	2702	2686
61	1162	1131	95	2774	2743
62	1192	1168	96	2806	2801
63	1228	1206	97	2902	2860
64	1260	1245	98	2944	2919
65	1308	1284	99	3004	2979
66	1328	1324	100	3044	3039

Lisbonne, le 27 novembre 1880.