

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

**Application de la méthode précédente à l'équation
linéaire à coefficients constants avec second membre**

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2^e série,
tome 3, n° 1 (1879), p. 325-328

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_325_1>

© Gauthier-Villars, 1879, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**APPLICATION DE LA MÉTHODE PRÉCÉDENTE A L'ÉQUATION LINÉAIRE
A COEFFICIENTS CONSTANTS AVEC SECOND MEMBRE;**

PAR M. G. DARBOUX.

Dans les Leçons que nous venons de reproduire, M. Hermite a traité seulement l'équation linéaire sans second membre. Mais un résultat très-important obtenu par l'illustre géomètre va nous conduire d'une manière simple à l'intégration de l'équation linéaire à coefficients constants et avec second membre. Cauchy, du reste, n'avait pas négligé cette dernière équation, et il l'a considérée dans différents Mémoires insérés aux *Exercices de Mathématiques* ⁽¹⁾.

Supposons que l'on se propose d'intégrer l'équation

$$(1) \quad \alpha y + \beta \frac{dy}{dx} + \dots + \lambda \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \frac{d^n y}{dx^n} = f(x),$$

où $\alpha, \beta, \dots, \lambda$ sont des constantes et $f(x)$ une fonction quelconque. On pourra appliquer la règle suivante, due aussi à Cauchy.

On formera d'abord une solution particulière $\Phi(x, t)$ de l'équation sans second membre, se réduisant à zéro ainsi que ses $n-2$ premières dérivées pour $x = t$, et telle, en outre, que sa dérivée

(1) Voir les Mémoires suivants de Cauchy :

Application du calcul des résidus à l'intégration des équations linéaires à coefficients constants (*Exercices de Mathématiques*, t. I, p. 202).

Sur la détermination des constantes arbitraires renfermées dans les intégrales des équations différentielles linéaires (*Exercices de Mathématiques*, t. II, p. 25).

Sur la transformation des fonctions qui représentent les intégrales générales des équations différentielles linéaires (*Exercices de Mathématiques*, t. II, p. 210).

$n - 1^{\text{ème}}$ se réduise à $f'(t)$ pour la même valeur de x . Cela posé, la fonction

$$(2) \quad y = \int_{x_0}^x \Phi(x, t) dt,$$

où x_0 est une constante quelconque, sera une solution particulière de l'équation différentielle proposée.

Nous avons donc à former ici la fonction $\Phi(x, t)$, que nous venons de définir. Or, d'après une règle démontrée par M. Hermite, l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{zx} dz}{\mathbf{F}(z)},$$

prise sur le contour d'un cercle de rayon très-grand, est une solution de l'équation sans second membre, se réduisant à zéro ainsi que ses $n - 2$ premières dérivées pour $x = 0$ et ayant pour la même valeur de x sa $(n - 1)^{\text{ème}}$ dérivée égale à l'unité. Changeons dans l'intégrale précédente x en $x - t$, multiplions par $f(t)$, et nous obtiendrons la fonction qu'il s'agissait de former,

$$(3) \quad \Phi(x, t) = \frac{f(t)}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{z(x-t)} dz}{\mathbf{F}(z)},$$

l'intégrale étant toujours prise sur le contour d'un cercle de rayon suffisamment grand.

Ainsi l'intégrale double

$$(4) \quad \mathbf{Y} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^x f(t) dt \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{z(x-t)} dz}{\mathbf{F}(z)}$$

est une solution particulière de l'équation différentielle (1).

Voici comment on peut vérifier directement ce résultat. En différentiant la formule (4), on a

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \frac{f(x)}{2\pi i} \int_{\mathbf{R}} \frac{dz}{\mathbf{F}(z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^x f(t) dt \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{z(x-t)} z dz}{\mathbf{F}(z)}.$$

L'intégrale curviligne qui figure dans le premier terme est évidemment nulle. Il reste donc

$$(5) \quad \frac{d\mathbf{Y}}{dx} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^x f(t) dt \int_{\mathbf{R}} \frac{e^{z(x-t)} z dz}{\mathbf{F}(z)}.$$

Si l'on remarque que toutes les intégrales

$$\int_R \frac{z^p dz}{F(z)}$$

sont nulles tant que p est inférieur à $n - 1$, on trouvera, en différenciant successivement la formule (5),

$$(6) \quad \frac{d^p Y}{dx^p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^x f(t) dt \int_R \frac{e^{z(x-t)} z^p dz}{F(z)},$$

tant que p sera inférieur à n .

Pour obtenir la dérivée $n^{\text{ième}}$, nous différentierons la formule précédente, en y supposant $p = n - 1$. Nous avons

$$\frac{d^n Y}{dx^n} = \frac{f(x)}{2\pi i} \int_R \frac{z^{n-1} dz}{F(z)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^x f(t) dt \int_R \frac{e^{z(x-t)} z^n dz}{F(z)},$$

et, comme on a

$$\int_R \frac{z^{n-1} dz}{F(z)} = 2\pi i,$$

il restera

$$(7) \quad \frac{d^n Y}{dx^n} = f(x) + \frac{1}{2\pi i} \int_{x_0}^x f(t) dt \int_R \frac{e^{z(x-t)} z^n dz}{F(z)}.$$

Il suffit maintenant de substituer les valeurs de Y et de ses dérivées pour reconnaître que Y est une solution particulière de l'équation différentielle (1). Au reste, la démonstration précédente est au fond celle de Cauchy.

Reportons-nous à la formule (4) et posons

$$(8) \quad R(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_R \frac{e^{z(x-t)} dz}{F(z)};$$

$R(t)$ sera la somme des résidus relatifs à toutes les racines de $F(z)$.

Supposons qu'on ait décomposé $\frac{1}{F(z)}$ en fractions simples, et posons

$$\frac{1}{F(z)} = \sum \left[\frac{A_0}{z-a} + \frac{A_1}{(z-a)^2} + \dots + \frac{A_{p-1}}{(z-a)^p} \right];$$

on aura

$$e^{z(x-t)} = e^{a(x-t)} \left[1 + \frac{(z-a)(x-t)}{1} + \dots \right],$$

et le résidu relatif à la racine a sera

$$e^{a(x-t)} \left[A_0 + \frac{A_1(x-t)}{1} + \dots + \frac{A_{p-1}(x-t)^{p-1}}{1.2\dots p-1} \right].$$

On aura donc

$$(9) \quad R(t) = \sum e^{a(x-t)} \left[A_0 + \frac{A_1(x-t)}{1} + \dots + \frac{A_{p-1}(x-t)^{p-1}}{1.2\dots p-1} \right],$$

et Y sera alors donné par la formule

$$(10) \quad Y = \int_{x_0}^x f(t) R(t) dt,$$

absolument identique à celle qui a été donnée pages 199 et 200.

