BULLETIN DES SCIENCES

MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur un nouvel appareil à ligne droite de M. Hart

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques 2e série, tome 3, nº 1 (1879), p. 144-151

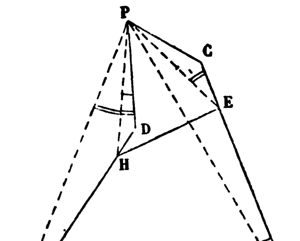
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1879_2_3_1_144_1>

SUR UN NOUVEL APPAREIL A LIGNE DROITE DE M. HART;

PAR M. G. DARBOUX.

Dans les *Proceedings of the London Mathematical Society* (vol. VIII, p. 288), M. Hart, qui avait déjà trouvé un premier système articulé réalisant avec cinq tiges seulement la description mécanique de la ligne droite, a fait connaître une nouvelle solution du même problème dans laquelle il emploie le même nombre de tiges. Le nouvel appareil de M. Hart, tout à fait différent du

Fig. 1.



premier, nous paraît offrir le plus grand intérêt. Récemment M. Kempe l'a retrouvé, en étudiant une question plus générale sur laquelle nous aurons l'occasion de revenir (1). Pour le moment, nous nous proposons d'exposer la méthode de M. Hart, en la géné-

(1) A.-B. KEMPE, *On conjugate Four-piece Linkages* (*Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. IX, p. 133, n° 132).

ralisant quelque peu et en mettant en évidence quelques conséquences très-simples des résultats obtenus par l'auteur

Soit ABCDP un pentagone articulé fixé par les deux sommets A et B. Le mouvement de cette figure dépend de deux paramètres; par exemple, on peut prendre arbitrairement les angles en A et en B; nous achèverons de déterminer ce mouvement par la condition que les angles en C et en D soient égaux. Nous allons voir que cette condition, qu'il serait difficile de réaliser mécaniquement, peut être remplacée par celle-ci, que deux points H, E convenablement choisis sur AD et sur BC soient maintenus à une distance constante et par conséquent reliés par une tige de longueur convenable.

En effet, déterminons un point H sur AD, par la condition

$$\frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{PD}} = \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{CB}}.$$

Les deux triangles PHD, PCB, ayant les angles C et D égaux par hypothèse, seront semblables; on aura donc

$$(1)\qquad \frac{\mathrm{DH}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{CB}} = \frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PB}},$$

$$(2)\qquad \text{angle HPD} = \text{angle PBC}.$$

De même, déterminons un point E sur BC par la condition

$$\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{PC}} = \frac{\mathrm{PD}}{\mathrm{AD}}.$$

Les deux triangles PDA, PCE seront semblables, et l'on aura

$$(3)\qquad \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{PD}} = \frac{\mathrm{PC}}{\mathrm{AD}} = \frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{AP}},$$

$$(4)\qquad \text{angle APD} = \text{angle PEC}.$$

Je vais démontrer que les points H et E sont à une distance invariable. Mais auparavant je désignerai, pour plus de netteté, par des lettres les différents segments de la figure. Posons

$$\mathrm{AB} = a,\quad \mathrm{AH} = b,\quad \mathrm{HD} = b',\quad \mathrm{DP} = \beta,$$
$$\mathrm{BE} = c,\quad \mathrm{EC} = c',\quad \mathrm{CP} = \gamma.$$

Les égalités (1), (3) nous donnent, entre ces lignes, les relations

$$\beta\gamma = b'(c+c') = c'(b+b'),$$

d'où l'on déduit

$$bc' - cb' = 0.$$

Posons

(5) $$b' = bk, \quad c' = ck,$$

on aura

(6) $$\beta\gamma = bck(1+k),$$

et des égalités (1) et (3) on déduira aussi

(7) $$\frac{\mathrm{PH}}{\mathrm{PB}} = \frac{\beta}{c(1+k)}, \quad \frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{PA}} = \frac{\gamma}{b(1+k)}.$$

Cela posé, en vertu des équations (2), (4), les angles APH, BPE sont égaux comme différences d'angles égaux, et, par conséquent, les angles en P des deux triangles HPE, APB sont aussi égaux. On aura donc, en désignant par P leur valeur commune,

$$\overline{\mathrm{HE}}^2 = \overline{\mathrm{PH}}^2 + \overline{\mathrm{PE}}^2 - 2\,\overline{\mathrm{PH}}.\overline{\mathrm{PE}}\cos\mathrm{P},$$
$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{PA}}^2 + \overline{\mathrm{PB}}^2 - 2\,\overline{\mathrm{PA}}.\overline{\mathrm{PB}}\cos\mathrm{P}.$$

En éliminant le cosinus inconnu et remplaçant PH, PE par leurs valeurs tirées des équations (7), on trouve

$$\overline{\mathrm{HE}}^2 = \frac{c\gamma - b\beta}{b^2c^2(1+k)}\left(c\gamma\,\overline{\mathrm{PA}}^2 - b\beta\,\overline{\mathrm{PB}}^2\right) + \frac{a^2k}{1+k},$$

On a d'ailleurs, dans les deux triangles APD, BCP,

$$\overline{\mathrm{AP}}^2 = \beta^2 + b^2(1+k)^2 - 2b(1+k)\beta\cos\theta,$$
$$\overline{\mathrm{BP}}^2 = \gamma^2 + c^2(1+k)^2 - 2c(1+k)\gamma\cos\theta,$$

θ désignant la valeur commune des angles C et D. Éliminant θ, on trouve

(8) $$c\gamma\,\overline{\mathrm{PA}}^2 - b\beta\,\overline{\mathrm{PB}}^2 = (b\gamma - c\beta)bc(1+k)$$

et, par conséquent, on a

$$\overline{\mathrm{HE}}^2 = \frac{(c\gamma - b\beta)(b\gamma - c\beta)}{bc(1+k)} + \frac{a^2k}{1+k};$$

HE est donc constant, comme il fallait le démontrer, et, en désignant par d sa valeur, on a

$$(9)\qquad k(a^2-d^2)=d^2+\frac{(c\gamma-b\beta)(c\beta-b\gamma)}{bc}.$$

Ainsi, l'on pourra produire ce mouvement particulier du pentagone articulé, dans lequel les angles C et D variables sont constamment égaux, en réunissant les deux points H et E par une tige de la longueur d définie par l'équation précédente.

Mais alors l'équation (8), donnant une relation entre les distances du point P aux deux points fixes A et B, est l'équation du lieu du point P; ce lieu est, en général, un cercle ayant son centre sur la droite AB.

Si dans l'équation (8) on remplace PA, PB en fonction de PH, PE, on est conduit à l'équation

$$b\beta\,\overline{\mathrm{PE}}^2-c\gamma\,\overline{\mathrm{PH}}^2=bck(b\gamma-c\beta),$$

et l'on voit que, si au lieu de fixer A et B on fixait H et E, le lieu de P serait encore un cercle ayant son centre sur HE. En étudiant plus complétement cette figure, on retrouverait les systèmes de deux quadrilatères semblables considérés par M. Kempe dans le Mémoire que nous avons déjà cité.

Si l'on a

$$(10)\qquad c\gamma=b\beta,$$

l'équation (8) deviendra

$$\overline{\mathrm{PA}}^2-\overline{\mathrm{PB}}^2=\frac{b}{\gamma}(1+k)(b\gamma-c\beta),$$

et le lieu du point P deviendra une droite perpendiculaire à AB. C'est le résultat signalé d'abord par M. Hart. On a alors

$$(11)\qquad \begin{cases} k=\dfrac{d^2}{a^2-d^2}, \\ \beta=\dfrac{acd}{a^2-d^2}, \quad b'=\dfrac{bd^2}{a^2-d^2}, \quad b+b'=\dfrac{ba^2}{a^2-d^2}, \\ \gamma=\dfrac{abd}{a^2-d^2}, \quad c'=\dfrac{cd^2}{a^2-d^2}, \quad c+c'=\dfrac{ca^2}{a^2-d^2}. \end{cases}$$

Cette remarquable solution laisse donc entièrement arbitraires les quatre côtés du quadrilatère articulé ABEH. Le lieu du point P est alors défini par l'équation

$$\overline{PA}^2 - \overline{PB}^2 = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{a^2 - d^2}.$$

On voit que, si la théorie est un peu longue, le résultat est extrêmement simple.

Dans cet appareil, le mouvement de PD est celui d'une droite dont un point D décrit un cercle pendant qu'un autre point P décrit une droite. Cherchons si l'on peut disposer des dimensions des différentes tiges de telle manière que tous les points de cette droite décrivent des ellipses. Il faudra pour cela : 1° que la droite décrite par le point P passe en A; 2° que PD = AD.

En exprimant ces deux conditions, on trouve

$$c^2 - b^2 = a^2 - d^2, \quad ba = cd,$$

et, par conséquent,

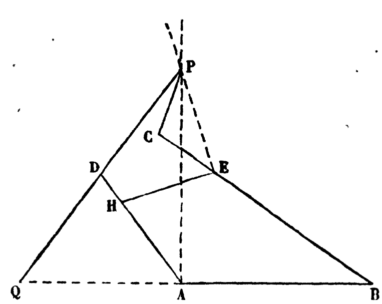
$$b = d, \quad c = a.$$

Alors l'appareil offre la disposition indiquée sur la figure. On a

$$AH = HE, \quad AB = BE, \quad AD = DP, \quad PC = CE.$$

Si l'on prolonge DP d'une longueur DQ = DP, le point Q décrit la

Fig. 2.



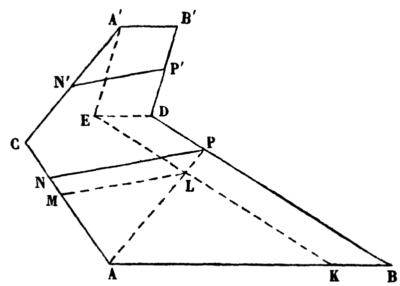
droite AB. Le mouvement de la barre PQ est donc celui d'une droite de longueur constante dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires. Tous les points invariablement liés à PQ et d'où l'on voit PQ sous un angle droit décriront des droites passant par A. Les points de PQ décrivent des ellipses.

Les collections de la Faculté des Sciences contiennent un très-beau modèle de cet appareil, exécuté par M. Bréguet. Ce modèle est disposé de telle manière, qu'au lieu de fixer les points A, B on peut fixer les points P et D. Alors tous les points de la droite AB, devenue mobile, décrivent des limaçons de Pascal.

L'ellipse et le limaçon de Pascal sont donc des courbes que l'on peut décrire, comme la ligne droite, par l'emploi de cinq tiges seulement.

Voilà donc une première conséquence des recherches de M. Hart.

Fig. 3.



En voici une seconde que nous nous contenterons d'indiquer en quelques mots.

Considérons l'hexagone articulé ABDB'A'CA, dont les points A, B sont fixes. Le mouvement de cette figure dépend de trois paramètres. Achevons de le déterminer par la condition que les angles C, D soient égaux et que A'B' soit parallèle à AB. Je dis que ces deux conditions peuvent être remplacées par celle-ci, que deux points N et P convenablement choisis sur AC, BD soient à une distance invariable ainsi que deux points N'P' pris sur A'C, B'D.

En effet, menons, par A', A'E égale et parallèle à B'D, puis EK égale et parallèle à DB. La figure A'EKAC sera un pentagone identique à celui dont nous avons étudié le mouvement, les angles en C et en E étant égaux. Il y aura donc deux points M et L sur EK et AC qui seront à une distance invariable. Si l'on prolonge AL jusqu'en P, et qu'on mène NP parallèle à AL, le quadrilatère NPBA sera homothétique au quadrilatère AKLM. On aura donc

$$\frac{\mathrm{NP}}{\mathrm{LM}} = \frac{\mathrm{AK}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AB} - \mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}};$$

NP sera donc constant comme LM.

Par raison de symétrie, ou en répétant le même raisonnement, on reconnaît qu'il y a de même deux points N', P' sur A'C, B'D qui demeurent à une distance invariable, en sorte que le mouvement de l'hexagone sera déterminé si l'on réunit par des tiges de longueurs convenables ces couples de points (N, P), (N',P').

Du reste, si les proportions des côtés de l'hexagone et par conséquent celles des côtés du pentagone A'CAKE sont convenablement choisies, c'est-à-dire si l'on a

$$\overline{\mathrm{A'C}}.\overline{\mathrm{CA}} = \overline{\mathrm{B'D}}.\overline{\mathrm{DB}},$$

le point A' décrira une droite perpendiculaire à AB; il en sera de même de tous les points de A'B'. On aura donc réalisé le mouvement d'une droite demeurant toujours horizontale pendant que tous ses points décrivent des verticales (¹).

Il est clair que, si l'on réunit dans l'espace deux appareils égaux de ce genre, situés dans deux plans verticaux faisant un angle quelconque et reliés par leurs points A' de telle manière que les deux

(¹) Voici quelles sont les dimensions des différentes tiges. Posons.

$$\mathrm{CA} = \beta.\quad \mathrm{DB} = \gamma,\quad \mathrm{AB} = a,$$
$$\mathrm{CA'} = \beta',\quad \mathrm{DB'} = \gamma',\quad \mathrm{A'B'} = a'.$$

On devra avoir

$$\beta\beta' = \gamma\gamma',$$

et l'on trouvera

$$\mathrm{AN} = \frac{a}{a-a'}\,\frac{\gamma\beta - \gamma'\beta'}{\gamma},\quad \mathrm{BP} = \frac{a}{a-a'}\,\frac{\gamma\beta - \gamma'\beta'}{\beta},\quad \mathrm{NP} = a\frac{\beta'}{\gamma},$$
$$\mathrm{A'N'} = \frac{a'}{a-a'}\,\frac{\gamma\beta - \gamma'\beta'}{\gamma'},\quad \mathrm{B'P'} = \frac{a'}{a-a'}\,\frac{\gamma\beta - \gamma'\beta'}{\beta'},\quad \mathrm{N'P'} = a'\frac{\beta}{\gamma'}.$$

Au reste, les deux quadrilatères ABPN, A'B'P'N' sont semblables, les côtés homologues etant AB et N'P', A'B' et NP, A'N' et BP, AN et B'P'. Les lignes NP, N'P sont parallèles, comme AB et A'B'. La theorie de cette figure peut également se rattacher aux belles recherches de M. Kempe.

points A' décrivent la même droite, les deux droites $A'B'$ détermineront un plan horizontal dont tous les points décriront des verticales. On pourra poser une table sur ces droites, et l'on aura ainsi la disposition, la plus simple connue, permettant de réaliser un mouvement parallèle dont les applications sont évidemment très-variées.