BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Correspondance mathématique entre Legendre et Jacobi

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 9 (1875), p. 51-95
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__9__51_1>

MELANGES.

CORRESPONDANCE MATHÉMATIQUE ENTRE LEGENDRE ET JACOBI ([1]).

(Suite.)

Jacobi à Legendre.

Konigsberg, le 12 avril 1828.

MONSIEUR,

Il me faut vous faire de grandes excuses d'avoir retardé aussi longtemps la réponse à votre aimable lettre, pleine de vos bontés, qui font la plus douce récompense de mes efforts et un grand bonheur de ma vie. En effet, j'avais espéré de jour en jour pouvoir vous mander la fin d'un premier Mémoire, qui devait embrasser la plupart de mes recherches. Cependant la difficulté de la matière, de même que les nouvelles vues qui se sont ouvertes dans le cours même du travail, me font éprouver de si grands retards, que peut-être il ne vous sera pas désagréable si je vous fais part des résultats principaux trouvés jusqu'ici, et qui me paraissent dignes de votre intérêt. Veuillez les accueillir avec la bonté dont vous m'avez

([1]) Voir *Bulletin*, t. IX, p. 38.

donné des preuves si éclatantes et qui seront gravées à jamais dans mon cœur.

Soit, d'après ma notation, $\omega = \frac{m\mathrm{K} + 2m'i\mathrm{K}'}{n}$ (n est un nombre impair), m et m' désignant des nombres entiers quelconques, mais tels qu'un même nombre ne saura être diviseur des trois, m', m, n. Vous verrez aisément que la démonstration de mon théorème s'applique mot à mot au cas même qu'on met partout $\operatorname{am}\omega$ au lieu de $\operatorname{am}\frac{\mathrm{K}}{n}$. En mettant successivement

$$\omega = \frac{\mathrm{K}}{n},\quad \frac{2i\mathrm{K}'}{n},\quad \frac{\mathrm{K}\pm 2i\mathrm{K}'}{n},\quad \frac{\mathrm{K}\pm 4i\mathrm{K}'}{n},\ldots,\quad \frac{\mathrm{K}\pm(n-1)i\mathrm{K}'}{n},$$

on tire de là un nombre $n+1$ de transformations attachées au nombre n, et analogues à celle que j'ai donnée relativement à $\omega = \frac{\mathrm{K}}{n}$. Elles embrassent toutes les possibles quand n est premier; aussi, dans le cas de $n = 3$, $n = 5$, j'ai montré que les équations modulaires montent au quatrième et sixième degré, comme cela doit être. De ces modules, au nombre de $n+1$, il n'y a que deux qui soient réels, savoir : ceux qui répondent à $\omega = \frac{\mathrm{K}}{n}$ et à $\omega = \frac{2i\mathrm{K}'}{n}$. La dernière transformation, savoir, celle qui répond à $\omega = \frac{2i\mathrm{K}'}{n}$, est précisément la même qui fournit le théorème complémentaire. Pour démontrer ceci, il faut remonter aux formules analytiques concernant la multiplication, données la première fois par M. Abel. J'en cite les trois suivantes, présentées d'après la forme sous laquelle vous considérez les fonctions elliptiques, et dans laquelle j'ai eu soin de vous suivre :

♀

$$\left\{\begin{aligned}
&(1)\quad \sin\operatorname{am}(n\xi,\varkappa) = (-1)^{\frac{n-1}{2}}\varkappa^{\frac{n^2-1}{2}}\,\Pi \sin\operatorname{am}\left(\xi + \frac{2m\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}'}{n}\right),\\
&(2)\quad \frac{1}{\varkappa^{n^2-1}} = \Pi \sin^4\operatorname{coam}\frac{2m\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}'}{n},\\
&(3)\quad \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n} = \Pi\,\frac{\sin^2\operatorname{coam}\dfrac{2m\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}'}{n}}{\sin^2\operatorname{am}\dfrac{2m\mathrm{K}+2m'i\mathrm{K}'}{n}}.
\end{aligned}\right.$$

Les produits désignés par Π embrassent tous les facteurs *différents entre eux* que l'on obtient en donnant à m, m' des valeurs en nombres entiers positifs ou négatifs.

Les trois formules principales relatives à la transformation complémentaire sont

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\sin\mathrm{am}(n\xi, \varkappa)\\
&= \sqrt{\frac{\lambda^n}{\varkappa}}\sin\mathrm{am}\frac{\xi}{\mathrm{M}}\sin\mathrm{am}\left(\frac{\xi}{\mathrm{M}}+\frac{4i\Lambda'}{n}\right)\sin\mathrm{am}\left(\frac{\xi}{\mathrm{M}}+\frac{8i\Lambda'}{n}\right)\cdots\sin\mathrm{am}\left[\frac{\xi}{\mathrm{M}}+\frac{4(n-1)i\Lambda'}{n}\right](\mathrm{mod.}\lambda)\\
&= \frac{n\mathrm{M}y\left(1+\dfrac{y^2}{\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{2\Lambda'}{n}}\right)\left(1+\dfrac{y^2}{\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{4\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left[1+\dfrac{y^2}{\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}\right]}{\left(1+\lambda^2\,\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{2\Lambda'}{n}y^2\right)\left(1+\lambda^2\,\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{4\Lambda'}{n}y^2\right)\cdots\left[1+\lambda^2\,\mathrm{tang}^2\mathrm{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}y^2\right]}(\mathrm{mod.}\lambda').
\end{aligned}\right.$$

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\varkappa = \lambda^n\left[\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{2i\Lambda'}{n}\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{4i\Lambda'}{n}\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{6i\Lambda'}{n}\cdots\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{(n-1)i\Lambda'}{n}\right]^4\ (\mathrm{mod.}\,\lambda)\\
&= \frac{\lambda^n}{\left[\Delta\,\mathrm{am}\frac{2\Lambda'}{n}\Delta\,\mathrm{am}\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\Delta\,\mathrm{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}\right]^4}\ (\mathrm{mod.}\,\lambda'),
\end{aligned}\right.$$

$$(3)\quad \frac{1}{n\mathrm{M}} = \left[\frac{\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{2\Lambda'}{n}\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\sin\,\mathrm{coam}\,\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}{\sin\mathrm{am}\frac{2\Lambda'}{n}\sin\mathrm{am}\frac{4\Lambda'}{n}\cdots\sin\mathrm{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}\right]^2(\mathrm{mod.}\lambda'),$$

où l'on a mis

$$y = \sin\mathrm{am}\left(\frac{\xi}{\mathrm{M}}, \lambda\right),\qquad \Lambda = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\varphi}},$$

$$\Lambda' = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\lambda'^2\sin^2\varphi}},\qquad \lambda^2+\lambda'^2 = 1.$$

Il faut ajouter que la théorie de la première transformation donne $\Lambda = \dfrac{\mathrm{K}}{n\mathrm{M}}$, $\Lambda' = \dfrac{\mathrm{K}'}{\mathrm{M}}$. Démontrons la première de ces formules.

Si, dans la formule suivante, qui concerne la première transformation,

$$\begin{aligned}
&\sin\mathrm{am}\left(\frac{\xi}{\mathrm{M}}, \lambda\right)\\
&= (-1)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{\frac{\varkappa^n}{\lambda}}\sin\mathrm{am}\,\xi\,\sin\mathrm{am}\left(\xi+\frac{4\mathrm{K}}{n}\right)\sin\mathrm{am}\left(\xi+\frac{8\mathrm{K}}{n}\right)\cdots\sin\mathrm{am}\left[\xi+\frac{4(n-1)\mathrm{K}}{n}\right],
\end{aligned}$$

on met $\xi + \frac{2m'iK'}{n}$ au lieu de ξ, $\frac{\xi}{M}$ devenant

$$\frac{\xi}{M} + \frac{2m'iK'}{nM} = \frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n},$$

on a

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}, \lambda\right)$$
$$= \sqrt{\frac{\varkappa^n}{\lambda}} \Pi \sin\operatorname{am}\left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right),$$

où l'on donne à m les valeurs $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots, \pm \frac{n-1}{n}$.
Dans cette formule, mettant successivement $m' = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$ $\pm \frac{n-1}{n}$, et formant le produit, on a

$$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \Pi \sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}, \lambda\right)$$
$$= \sqrt{\frac{\varkappa^{n^2}}{\lambda^n}} \Pi \sin\operatorname{am}\left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right).$$

Mais la formule désignée par ♀ (1) donne

$$\sin\operatorname{am} n\xi = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \varkappa^{\frac{n^2-1}{2}} \Pi \sin\operatorname{am}\left(\xi + \frac{2mK + 2m'iK'}{n}\right),$$

d'où l'on tire

$$\sin\operatorname{am}(n\xi, \varkappa) = \sqrt{\frac{\lambda^n}{\varkappa}} \Pi \sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M} + \frac{2m'i\Lambda'}{n}, \lambda\right),$$

ce qui est la formule à démontrer. De la même manière, on démontre les deux autres au moyen des formules ♀ (2), (3). La formule dont j'ai fait mention dans ma première Lettre résulte des mêmes principes.

Si l'on met dans ces deux transformations $i\xi$ au lieu de ξ, on a la transformation du module $\varkappa'$ dans le module λ', et *vice versa*. Nommant λ_1 le second module réel dans lequel on sait transformer le module $\varkappa$ et qui répond à $\omega = \frac{2iK'}{n}$, on verra que λ dépend de la même manière de $\varkappa$ que $\varkappa$ de λ_1, λ_1 de $\varkappa'$ et $\varkappa'$ de λ', λ'_1 étant le complément de λ_1. Donc, si l'on forme, d'après la même loi, deux échelles relatives à $\varkappa$ et $\varkappa'$, trois termes consécutifs seront, dans l'une ... λ, $\varkappa$, λ_1, ..., et dans l'autre ... λ'_1, $\varkappa'$, λ', ..., théorème que vous avez démontré dans le cas de $n = 2$ et de $n = 3$.

On pourrait d'une manière analogue passer à la multiplication par le moyen du module λ_1, de même que par le moyen des autres modules imaginaires.

Faisons $\xi = \frac{u}{n}$, $n = \infty$, on aura dans cette limite $\lambda = 0$, et par conséquent $\Lambda = \frac{\pi}{2}$; les formules $\Lambda = \frac{K}{nM}$, $\Lambda' = \frac{K'}{M}$ donnent

$$nM = \frac{2K}{\pi}, \quad \frac{\Lambda'}{n} = \frac{K'}{nM} = \frac{\pi K'}{2K};$$

on aura de plus

$$y = \sin\operatorname{am}\left(\frac{\xi}{M}, \lambda\right) = \sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{nM}, \lambda\right) = \sin\frac{\pi u}{2K}.$$

La formule (1) peut s'écrire de la manière suivante :

$$\sin\operatorname{am}(n\xi, \varkappa) = \frac{nMy\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{2i\Lambda'}{n}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{4i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left[1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{(n-1)\Lambda'}{n}}\right]}{\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{i\Lambda'}{n}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{3i\Lambda'}{n}}\right)\cdots\left[1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\operatorname{am}\frac{(n-2)i\Lambda'}{n}}\right]} \pmod{\lambda}.$$

De là on tire, dans le cas de $n = \infty$,

$$\sin\operatorname{am} u = \frac{\dfrac{2Ky}{\pi}\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\frac{i\pi K'}{K}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\frac{2i\pi K'}{K}}\right)\left(1 - \dfrac{y^3}{\sin^2\frac{3i\pi K'}{K}}\right)\cdots}{\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\frac{i\pi K'}{2K}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\frac{3i\pi K'}{2K}}\right)\left(1 - \dfrac{y^2}{\sin^2\frac{5i\pi K'}{2K}}\right)\cdots},$$

y étant $\sin\frac{\pi u}{2K}$. Soient $e^{\frac{i\pi u}{2K}} = U$, $e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$; cette formule se transforme dans celle-ci :

$$\sin\operatorname{am}(u, \varkappa)$$
$$= \frac{2K}{\pi} A \left(\frac{U - U^{-1}}{2i}\right) \frac{[(1-q^2U^2)(1-q^4U^2)(1-q^6U^2)\ldots][(1-q^2U^{-2})(1-q^4U^{-2})(1-q^6U^{-2})\ldots]}{[(1-q\,U^2)(1-q^3U^2)(1-q^5U^2)\ldots][(1-q\,U^{-2})(1-q^3U^{-2})(1-q^5U^{-2})\ldots]},$$

où l'on a mis $A = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots}\right]^2$. Si l'on met dans cette formule $u + iK'$ au lieu de u, U deviendra $\sqrt{q}\,U$; de là on tire, en remarquant que $\sin\operatorname{am}(u + iK') = \frac{1}{\varkappa \sin\operatorname{am} u}$, la valeur de $A = \frac{\pi\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa K}}$. De la même manière on trouve, au moyen des expressions semblables pour $\cos\operatorname{am} u$, $\Delta\operatorname{am} u, \ldots$, les valeurs des produits suivants :

$$[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^6 = \frac{2\varkappa'\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}},$$

$$[(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots]^6 = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa\varkappa'}},$$

$$[(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\ldots]^6 = \frac{2\varkappa\varkappa' K^3}{\sqrt{q}\,\pi^3},$$

$$[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^6 = \frac{\varkappa}{4\sqrt{\varkappa'}\sqrt{q}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

sommations très-remarquables, ce me semble.

Comme on a $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K}$, $\frac{\Lambda'_1}{\Lambda} = \frac{1}{n}\frac{K'}{K}$, on voit qu'en mettant seulement q^n ou $q^{\frac{1}{n}}$ au lieu de q on tire de ces formules aussitôt les expressions semblables relatives aux modules transformés λ, λ_1. Ainsi l'on aura, par exemple,

$$\varkappa = 4\sqrt{q}\left[\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4,$$

$$\lambda = 4\sqrt{q^n}\left[\frac{(1+q^{2n})(1+q^{4n})(1+q^{6n})\ldots}{(1+q^n)(1+q^{3n})(1+q^{5n})\ldots}\right]^4.$$

On ne saura guère reconnaître de la nature de ces produits que ces deux expressions dépendent *algébriquement* l'une de l'autre.

Je remarque encore que, comme on a

$$\varkappa' = \left[\frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots}\right]^4, \quad \varkappa^2 + \varkappa'^2 = 1,$$

on aura aussi

$$\begin{aligned}&[(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots]^8\\ &\quad + 16q[(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\ldots]^8 = [(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\ldots]^8,\end{aligned}$$

équation difficile à prouver au moyen des méthodes connues. On y saura ajouter nombre d'autres.

Si l'on met $u + \frac{4mK}{n}$ au lieu de u, U change en αU, où $\alpha^n = 1$

De là se déduit, de la formule pour sin am u, une nouvelle vérification assez facile de ma première transformation. Je passe à d'autres recherches.

Soit

$$\begin{aligned}&\left(\frac{U - U^{-1}}{2}\right)[(1-q^2U^2)(1-q^4U^2)(1-q^6U^2)\ldots]\\ &\qquad \times [(1-q^2U^{-2})(1-q^4U^{-2})(1-q^6U^{-2})\ldots]\\ &\qquad = a'(U - U^{-1}) + a''(U^3 - U^{-3}) + a'''(U^5 - U^{-5}) + \ldots\end{aligned}$$

Si l'on met dans ce produit qU au lieu de U, il sera multiplié par $\left(\frac{qU - q^{-1}U^{-1}}{U - U^{-1}}\right)\left(\frac{1-U^{-2}}{1-q^2U^2}\right) = -\frac{1}{qU^2}$. De là suit

$$a'' = -q^2 a', \quad a''' = -q^4 a'', \quad a^{\text{IV}} = -q^6 a''', \quad \ldots,$$

ou

$$\frac{a''}{a'} = -q^2, \quad \frac{a'''}{\alpha'} = +q^{2\cdot 3}, \quad \frac{a^{\text{IV}}}{a'} = -q^{3\cdot 4}, \quad \frac{a^{\text{V}}}{a'} = +q^{4\cdot 5}, \ldots,$$

de sorte qu'on aura ce produit égal à

$$\begin{aligned}&a'[U - U^{-1} - q^2(U^3 - U^{-3}) + q^6(U^5 - U^{-5})\\ &\qquad - q^{12}(U - U^{-}) + q^{20}(U^9 - U^{-9}) - \ldots].\end{aligned}$$

De la même manière, on trouve

$$
\begin{aligned}
&[(1-qU^2)(1-q^3U^2)(1-q^5U^2)\ldots] \\
&\qquad\times[(1-qU^{-2})(1-q^3U^{-2})(1-q^5U^{-2})\ldots] \\
&\quad = b\,[1-q(U^2+U^{-2})+q^4(U^4+U^{-4}) \\
&\qquad\quad -q^9(U^6+U^{-6})+q^{16}(U^8+U^8)-\ldots],
\end{aligned}
$$

a' et b désignant des constantes.

On aura donc

$$
\sin\operatorname{am} u = C\,\frac{U-U^{-1}-q^2(U^3-U^{-3})+q^6(U^5-U^{-5})-q^{12}(U^7-U^{-7})+\ldots}{1-q(U^2+U^{-2})+q^4(U^4+U^{-4})-q^9(U^6+U^{-6})+q^{16}(U^8+U^{-8})-\ldots}.
$$

La constante C se détermine encore au moyen de la formule

$$
\sin\operatorname{am}(u+iK') = \frac{1}{\varkappa\sin\operatorname{am} u},
$$

en remarquant que U change en $\sqrt{q}\,U$ en même temps que u devient $u+iK$. On la trouve égale à $\frac{i\sqrt{\varkappa}}{\sqrt[4]{q}}$, de sorte qu'il vient, en mettant $u=\frac{2Kx}{\pi}$,

$$
(1)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} \\
&\quad=\frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\,\frac{q^{\frac14}\sin x-q^{\frac94}\sin 3x+q^{\frac{25}{4}}\sin 5x-q^{\frac{49}{4}}\sin 7x+\ldots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\ldots}.
\end{aligned}\right.
$$

J'y ajoute les trois semblables

$$
(2)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\cos\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} \\
&\quad=2\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\,\frac{q^{\frac14}\cos x+q^{\frac94}\cos 3x+q^{\frac{25}{4}}\cos 5x+q^{\frac{49}{4}}\cos 7x+\ldots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\ldots},
\end{aligned}\right.
$$

$$
(3)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} \\
&\quad=\sqrt{\varkappa'}\,\frac{1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x+\ldots}{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\ldots},
\end{aligned}\right.
$$

$$(4)\quad \left\{ \begin{aligned} &\operatorname{tang} \frac{1}{2} \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi} \\ &= \frac{\sin\frac{x}{2} + q\sin\frac{3x}{2} - q^3\sin\frac{5x}{2} - q^6\sin\frac{7x}{2} + q^{10}\sin\frac{9x}{2} + q^{15}\sin\frac{11x}{2} - \ldots}{\cos\frac{x}{2} - q\cos\frac{3x}{2} - q^3\cos\frac{5x}{2} + q^6\cos\frac{7x}{2} + q^{10}\cos\frac{9x}{2} - q^{15}\cos\frac{11x}{2} - \ldots}. \end{aligned} \right.$$

Je remarque encore les formules suivantes :

$$\sqrt{\frac{2K}{\pi}} = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots,$$

$$\sqrt{\varkappa} = \frac{2\left(q^{\frac{1}{4}} + q^{\frac{9}{4}} + q^{\frac{25}{4}} + q^{\frac{49}{4}} + \ldots\right)}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots},$$

$$\sqrt{\varkappa'} = \frac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + 2q^{16} - \ldots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont la première est la plus remarquable.

Quant à l'importance de ces formules, vous la sentirez mieux que je ne pourrais le dire. Aussi elles ne seront pas sans intérêt pour les célèbres géomètres qui s'occupent du mouvement de la chaleur, les numérateurs et les dénominateurs des fractions par lesquelles on a exprimé les fonctions trigonométriques de l'amplitude étant souvent rencontrés dans ladite question. Je finirai l'exposition rapide des résultats principaux trouvés jusqu'ici.

Vous auriez voulu que j'eusse donné la chaîne des idées qui m'a conduit à mes théorèmes. Cependant la route que j'ai suivie n'est pas susceptible de rigueur géométrique. La chose étant trouvée, on pourra y substituer une autre sur laquelle on aurait pu y parvenir rigoureusement. Ce n'est donc que pour vous, Monsieur, que j'ajoute le suivant :

La première chose que j'avais trouvée (dans le mars 1827), c'était l'équation $T = \frac{V\,dU}{dx} - \frac{U\,dV}{dx}$; de là je reconnus que, pour un nombre n quelconque, la transformation était un problème d'Analyse algébrique *déterminé*, le nombre des constantes arbitraires égalant toujours celui des conditions. Au moyen des coefficients indéterminés, je formai les transformations relatives aux nombres 3 et 5. L'équation du quatrième degré, à laquelle me mena la première, ayant presque la même forme que celle qui sert à la trisection, j'y soupçonnai quelque rapport. Par un tâtonnement heureux, je remarquai dans ces deux cas l'autre transformation complémentaire pour la multiplication. Là j'écrivis ma première lettre à M. Schumacher, la méthode générale étant vérifiée par des exemples. Depuis, examinant plus de proche les deux substitutions $z = \frac{ay + by^3}{1 + cy^2}$, $y = \frac{a'x + b'x^3}{1 + c'x^2}$ sous la forme présentée dans ma première lettre, je vis qu'étant mis $x = \sin \operatorname{am} \frac{2K}{3}$, z devra s'évanouir, et comme, dans ladite forme, $\frac{b}{a}$ était positif, j'en conclus que y devra s'évanouir aussi. De cette manière, je trouvai par induction la résolution en facteurs, laquelle étant confirmée par des exemples, je donnai le théorème général dans ma seconde lettre à M. Schumacher. Ensuite, ayant remarqué l'équation

$$\sin \operatorname{am}(i\xi, \varkappa) = i \operatorname{tang} \operatorname{am}(\xi, \varkappa'),$$

j'en tirai la transformation de $\varkappa'$ en λ'. J'avais donc deux transformations différentes, l'une de $\varkappa$ dans un module plus petit λ, l'autre de $\varkappa'$ dans un module plus grand λ'. De là je fis la conjecture qu'en échangeant entre eux $\varkappa'$ et λ, $\varkappa$ et λ', on aurait l'expression analytique de la transformation complémentaire. Tout étant confirmé par des exemples, j'eus la hardiesse de vous adresser une première lettre ([1]), qui a été accueillie de vous avec tant de candeur. Les démonstrations n'ont été trouvées que ci-après.

Le 14 février dernier, j'ai enfin reçu votre excellent cadeau par la bonté de M. de Humboldt, qui me l'a fait parvenir aussitôt qu'il arriva à Berlin. Il fera l'étude de ma vie.

M. Schumacher m'a donné connaissance de ce que vous lui avez écrit du théorème complémentaire; je me suis donc empressé de faire partir cette lettre, et je l'en avertirai. Il faut m'excuser, Monsieur, si la bonne opinion que vous avez bien voulu avoir pour moi me rend un peu timide à présenter des choses trop imparfaites à un si grand maître.

([1]) Je l'avais donnee a un jeune marchand que je ne connaissais pas personnellement; on m'avait dit qu'il allait droitement a Paris; mais il a passe plusieurs mois dans les capitales de l'Allemagne. De là s'est fait, a mon grand depit, le retard de cette lettre.

M. Crelle m'a écrit que la continuation du Mémoire de M. Abel s'imprime déjà. Je l'attends avec impatience. Quant à M. Gauss, il n'a rien encore publié sur les fonctions elliptiques, mais il est certain qu'il a eu de jolies choses. S'il a été prévenu, et peut-être surpassé, c'est une juste peine de ce qu'il a répandu un voile mystique sur ses travaux. Je ne le connais pas personnellement, ayant étudié la Philologie à Berlin, où il n'y a pas de géomètres de distinction.

Daignez accueillir l'assurance de mon respect le plus profond.

Votre dévoué,

C.-G.-J. Jacobi.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 14 avril 1828 (¹),

Monsieur,

Je viens de recevoir une lettre de M. Schumacher, qui m'apprend que vous ne lui avez rien envoyé pour être imprimé dans son Journal. J'avais l'espérance que votre première publication contiendrait la démonstration de votre théorème II, laquelle m'intéresse d'autant plus, que j'ai lieu de croire que ce n'est que par un artifice nouveau et très-ingénieux que vous êtes parvenu à cette démonstration. En effet, si l'on fait, conformément à vos dénominations,

$$\frac{1}{2}\vartheta = \vartheta' - \vartheta''' + \vartheta^{\text{v}} \mp \ldots \mp \vartheta^{p-2}\frac{1}{2}\psi,$$

$$\operatorname{tang}\vartheta' = \frac{\operatorname{tang}\psi}{\sin\psi'}, \quad \operatorname{tang}\vartheta''' = \frac{\operatorname{tang}\psi}{\sin\psi'''}, \ldots,$$

et enfin

$$\lambda^2 + \lambda'^2 = 1, \quad F(\lambda', \psi^m) = \frac{m}{p}F^1(\lambda'),$$

on aura la formule du théorème II,

$$F(\varkappa, \vartheta) = \mu F(\lambda, \psi),$$

(¹) Cette lettre s'est croisée avec celle du 12 avril 1838, adressée par Jacobi à Legendre.

laquelle, étant combinée avec celle du théorème I, donne

$$F(\varkappa, \vartheta) = pF(\varkappa, \varphi).$$

Je trouve aisément, par les données du théorème II, qu'en faisant $\gamma' = \cot^2\psi'$, $\gamma''' = \cot^2\gamma'''$, ..., $x = \sin\psi$, $y = \sin\vartheta$, on a

$$y = \frac{\mu x\left(1+\frac{\lambda^2 x^2}{\gamma'}\right)\left(1+\frac{\lambda^2 x^2}{\gamma'''}\right)\left(1+\frac{\lambda^2 x^2}{\gamma^{\text{v}}}\right)\cdots}{(1+\gamma' x^2)(1+\gamma''' x^2)(1+\gamma^{\text{v}} x^2)\cdots},$$

et de là

$$\varkappa = \frac{\gamma'^2\gamma'''^2\gamma^{\text{v}2}\cdots}{\mu'\lambda^{2n-1}}.$$

Ces valeurs, entièrement déterminées, satisfont à ce beau principe de transformation qui vous est dû, savoir, qu'on peut mettre à la fois $\frac{1}{\varkappa\sin\vartheta}$ à la place de $\sin\vartheta$, et $\frac{1}{\lambda\sin\psi}$ à la place de $\sin\psi$. Mais, pour rendre la démonstration complète et semblable à celle du théorème I, il faudrait, dans l'équation

$$\sqrt{1-yy} = \sqrt{1-xx}\,\frac{P}{(1+\gamma' x^2)(1+\gamma''' x^2)\cdots},$$

pouvoir exprimer le numérateur P en produit de facteurs

$$(1+\delta' x^2)(1+\delta''' x^2)\ldots,$$

dont on connaîtrait l'expression générale. Or c'est ce qui paraît présenter une telle difficulté que je n'ai vu, après plusieurs recherches, aucun moyen de la résoudre. Il serait d'ailleurs fort superflu que j'employasse beaucoup de temps à cette recherche, puisque la gloire de la découverte vous appartiendrait tout entière, et qu'il n'entrerait nullement dans mon esprit d'en revendiquer la moindre partie. Vous voyez donc, Monsieur, combien vous m'obligeriez de vouloir bien satisfaire mon impatience, en donnant les directions nécessaires pour parvenir à votre démonstration. Je présume que ma demande n'exige pas de très-longs développements, et qu'il vous sera facile de me mettre sur la voie de votre belle découverte, qui excite ma curiosité au plus haut degré. *Intelligenti pauca.*

J'ai l'intention d'insérer dans les Mémoires de notre Académie une Notice de vos deux théorèmes, pour réveiller la paresse de nos jeunes auteurs, et les engager à ne pas rester si longtemps dans l'ignorance de la belle théorie que vous avez su élever à un degré de perfection inattendu.

M. Bessel a mandé à M. Schumacher que vous êtes fortement occupé de la rédaction d'un grand Mémoire sur les *Fonctions elliptiques*. Ce travail contiendra sans doute des développements curieux et très-intéressants de votre nouvelle théorie; il ne pourra manquer de vous faire beaucoup d'honneur, mais je vous engage de ne pas trop tarder à publier les parties essentielles de ce travail. Il y a des gens, comme M. Gauss, qui ne se feraient pas scrupule de vous ravir, s'ils le pouvaient, le fruit de vos recherches, et de prétendre qu'elles sont depuis longtemps en leur possession, prétention bien absurde assurément; car, si M. Gauss était tombé sur de pareilles découvertes, qui surpassent à mes yeux tout ce qui a été fait jusqu'ici en Analyse, bien sûrement il se serait empressé de les publier.

Veuillez, Monsieur, présenter mes civilités à M. Bessel, que je n'ai pas l'honneur de connaître, mais que je regarde comme l'un des premiers astronomes de l'Europe. J'ai vu, dans un numéro des *Astronomische Abhandlungen*, un joli Mémoire de M. Bessel, où il perfectionne la méthode des comètes de M. Olbers, par un moyen semblable à celui que j'ai employé dans le second Supplément de ma méthode, publié en août 1820.

J'ai l'honneur d'être, Monsieur, votre très-humble serviteur,

LEGENDRE.

Je compte sur une prompte réponse, et vous prie instamment de ne point l'affranchir, à moins qu'il ne soit impossible de faire autrement.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 11 mai 1828.

MONSIEUR,

J'ai reçu, le 26 avril, votre dernière lettre datée du 12, où se trouvent contenus les principes de la démonstration de votre théorème complémentaire, qu'il me tardait d'autant plus de recevoir de vous que je n'avais guère espérance de trouver cette démonstration par mes propres recherches, comme j'aurais pu faire peut-être dans un âge moins avancé où l'on est capable de supporter plus aisément une grande contention d'esprit. Je vous avais écrit le 14 du même mois pour obtenir de votre complaisance cette communication qui m'intéresse au plus haut degré, mais je vois, par la date de votre lettre, que c'est à la pressante sollicitation de M. Schumacher que vous vous êtes rendu à mes désirs, et que vous les avez en quelque sorte prévenus. Maintenant, Monsieur, vous apprendrez peut-être, avec quelque peine, que depuis le 26 avril que votre lettre m'est parvenue je n'ai pas été encore en état de me faire une juste idée de la belle méthode par laquelle vous êtes parvenu à déduire votre théorème II ou complémentaire du théorème I, dont la démonstration ne laisse rien à désirer. N'en concluez pas que j'aie quelque objection à faire à votre méthode qui, sans doute, est une nouvelle preuve de votre sagacité; mais j'ai été tellement malade d'un catarrhe qui m'a tourmenté tout l'hiver et qui s'est singulièrement aggravé au printemps, que toute étude sérieuse m'a été interdite depuis une vingtaine de jours, et que je suis devenu incapable d'entendre mes propres ouvrages. Cet état commence cependant à s'améliorer, et j'espère dans peu être en état de reprendre mes occupations ordinaires : ce sera pour moi une grande satisfaction de pouvoir comprendre votre nouvelle démonstration qui sera la première chose dont je m'occuperai. En attendant qu'un examen approfondi me mette en état d'apprécier toute sa valeur, je dois vous faire part d'une ou deux observations peu importantes. Ayant établi $\omega = \frac{m\mathrm{K}}{n} + \frac{2m'i\mathrm{K}'}{n}$, vous dites qu'on peut prendre pour m et m' des nombres entiers quelconques, *mais qui n'aient aucun diviseur commun avec le nombre impair donné n.* Il me semble que, si cette restriction avait lieu, l'équation pour la division d'une fonction elliptique en n parties ne serait plus du degré n^2, ce qui a pourtant lieu même quand n n'est pas un nombre premier.

Seconde observation. — Pour établir le principe de votre démonstration, il faut, dites-vous, recourir aux formules analytiques concernant la multiplication, *données pour la première fois* par M. Abel. Cet aveu, qui prouve votre candeur, qualité qui s'accorde si bien avec le vrai talent, me fait quelque peine; car, tout en rendant justice au beau travail de M. Abel, et le mettant cependant fort au-dessous de vos découvertes, je voudrais que la gloire de celle-ci, c'est-à-dire de leurs démonstrations, vous appartînt tout entière. Mais enfin je me consolerai aisément, la science n'y perd rien; vos démonstrations ne vous appartiennent pas moins, quelque part que vous en ayez pris les bases, soit dans mes ouvrages, soit dans le travail récent et très-estimable de M. Abel.

L'espace me manque pour m'étendre davantage dans une réponse qui n'est que provisoire. Je vous remercierai une autre fois de la franchise entièrement gracieuse avec laquelle vous avez satisfait à ma demande sur les moyens que vous aviez employés pour parvenir à de si beaux résultats.

Votre tout dévoué,

LEGENDRE.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 11 mai 1828.

MONSIEUR,

Depuis le jour où je me suis trouvé en état de vous écrire pour vous faire mes remercîments au moins provisoires sur les précieux renseignements que vous aviez eu l'obligeance de m'adresser dans votre lettre du 12 avril dernier, ma santé s'étant progressivement améliorée, j'ai enfin réussi à déduire la démonstration du théorème II de celle du théorème I, sans avoir recours aux formules de M. Abel, ce qui m'a entièrement satisfait; je serais parvenu sans doute beaucoup plus tôt à ce résultat, si j'avais pu me livrer à un examen plus approfondi des différents objets contenus dans votre lettre; mais l'état de souffrance où je suis resté pendant longtemps m'avait rendu incapable de tout travail, et m'aurait même empêché d'entendre mes propres ouvrages. Maintenant, Monsieur, je me propose de rédiger un Mémoire qui contiendra la démonstration de vos deux théorèmes et quelques accessoires, en me conformant aux principes de votre théorie, et rendant d'ailleurs toute la justice que je dois au mérite de vos découvertes, que personne ne sait et ne saura jamais mieux apprécier que moi. Ce Mémoire est destiné à paraître dans le Recueil des Mémoires de notre

Académie, mais il ne pourra pas être imprimé de sitôt, et vous aurez sans doute le temps de faire paraître, bien à l'avance, la suite de vos savantes recherches, soit dans le *Journal de M. Schumacher*, soit dans tout autre Recueil destiné aux Sciences.

Je n'ai pu que toucher très-légèrement, dans ma dernière lettre, ce que j'avais à vous dire sur la communication pleine de franchise que vous m'avez faite de la filiation des idées qui vous ont conduit à vos belles découvertes sur les fonctions elliptiques : je vois que nous avons couru tous deux des dangers, *vous* en annonçant des découvertes qui n'étaient pas encore revêtues du sceau d'une démonstration rigoureuse, et *moi* en leur donnant publiquement et sans restriction mon approbation tout entière. Nous n'avons pas à nous repentir ni l'un ni l'autre de ce que nous avons fait. D'ailleurs nous avions chacun nos raisons de nous conduire ainsi ; je ne dirai rien des vôtres ; quant à moi, je voyais très-clairement que des résultats tels que ceux que vous aviez obtenus ne pouvaient être l'effet ni du hasard, ni d'une induction trompeuse, mais bien d'une théorie profonde et appuyée sur la nature des choses ; d'ailleurs il m'avait été facile, au moyen de mes Tables et avec très-peu de calcul, de vérifier vos résultats pour le cas du nombre 7, et, après les avoir trouvés exacts jusqu'à cinq ou six décimales, il ne me restait aucun doute sur l'exactitude rigoureuse de la formule.

Vous avez eu la bonté, dans votre dernière lettre, et dans les précédentes, de me réduire à des expressions plus simples quelques-uns des beaux résultats de M. Abel. Je trouve comme vous que ces résultats, qui sont fort intéressants, ont été présentés par leur jeune et ingénieux auteur d'une manière fort méthodique, mais un peu embrouillée ; je ne vois pas, par exemple, pourquoi il s'est si fort appesanti sur les propriétés des fonctions qu'il désigne par f et F ; sans doute il aurait pu atteindre son but sans le secours de ces fonctions. Au reste, je pense que dans la suite de vos publications vous présenterez à votre manière les belles formules de M. Abel, et que vous donnerez à son travail plus de précision sans qu'il perde rien de son élégance ni de sa généralité.

Agréez, Monsieur, les sentiments d'estime et d'attachement que j'ai voués pour toujours à votre talent et à votre caractère.

LEGENDRE.

P.-S. — Il serait possible que je fasse bientôt un voyage de deux mois dans le midi de la France pour rétablir ma santé. Dans ce cas il ne faudrait pas vous étonner si une lettre que vous pourriez m'adresser dans cet intervalle restait assez longtemps sans réponse, parce que je n'en aurais connaissance qu'à mon retour.

Jacobi à Legendre.

Königsberg, le 9 septembre 1828.

Monsieur,

La lettre dans laquelle vous m'aviez mandé votre maladie de l'hiver passé m'a causé de grandes peines, et j'ai attendu avec la plus vive inquiétude la nouvelle de l'amélioration de votre santé qui m'est enfin parvenue. L'avis que vous avez voulu me donner en même temps de votre départ pour le midi de la France a causé le retard de ma réponse. Fasse le ciel que ce voyage vous ait entièrement satisfait !

Ma dernière lettre a été écrite un peu à la hâte; sans cela je n'aurais pas cru que l'on doit supposer connues les formules de multiplication pour la démonstration du théorème complémentaire. Aussi il avait été trouvé et communiqué à vous sans la connaissance de celles-ci. En effet, l'équation $\frac{\Lambda'}{\Lambda} = n\frac{K'}{K}$ montre que $\varkappa$ dépend de la même manière de λ que λ' de $\varkappa'$; d'où il suit qu'en appliquant au module λ la même transformation qui sert à parvenir du module $\varkappa'$ au module λ' il faut retomber sur le module $\varkappa$.

Vous aurez reçu sans doute deux Mémoires de M. Abel, l'un inséré dans le *Journal de M. Crelle*, l'autre dans les *Nouvelles astronomiques de M. Schumacher*. Vous y aurez vu que M. Abel a trouvé de son côté la théorie générale de la transformation, dans la publication de laquelle je l'ai prévenu de six mois. Le second Mémoire, inséré dans le *Recueil de M. Schumacher*, n° 138, contient une *déduction* rigoureuse des théorèmes de transformation, dont le défaut s'était fait sentir dans mes annonces sur le même objet. Elle est au-dessus de mes éloges comme elle est au-dessus de mes propres travaux.

Dans le même cahier du *Journal de M. Crelle* (t. III, 2e cahier) où se trouvent les premiers travaux de M. Abel sur la transformation, j'avais fait insérer la remarque que toutes les transformations attachées au nombre n sont au nombre $n+1$, lorsque n est premier, et que l'on trouvait tous les modules transformés qui s'y rapportent en mettant, dans la formule

$$\sqrt{\varkappa}=\frac{2\sqrt[4]{q}+2\sqrt[4]{q^9}+2\sqrt[4]{p^{25}}+\ldots}{1+29+29^4+29^9+\ldots},$$

q^n et $\sqrt[n]{q}$ au lieu de q, $\sqrt[n]{q}$ ayant n valeurs différentes. M. Abel verra donc que les transformations imaginaires ne m'étaient pas échappées. Que n soit premier ou non, le nombre des transformations sera en général égal à la somme des facteurs de n; on trouve tous les modules transformés en mettant $\sqrt[a]{q^{a'}}$ au lieu de q, aa' étant $=n$. Cette théorie est complète, de sorte qu'on ne saura y ajouter. Toutes les racines des équations modulaires se trouvent par là développées dans des séries d'une élégance et d'une convergence sans exemple dans l'Analyse. Je remarque encore que, n étant un nombre carré, on aura une seule fois $a=a'$; donc un seul des modules transformés sera, dans ce cas, égal à celui d'où l'on est parti, ce qui fournit la multiplication.

Vous ne m'avez dit dans deux de vos lettres pas un seul mot sur ces séries remarquables sommées par les fonctions elliptiques, dans lesquelles les exposants suivent la loi des nombres carrés, et dont celle-ci :

$$\sqrt{\frac{2\mathrm{K}}{\pi}}=1+2q+2q^4+2q^9+2q^{16}+2q^{25}+\ldots$$

me paraît être l'un des résultats les plus brillants de toute la théorie. Tout ce qui regarde la décomposition des nombres en nombres carrés devient, par ces séries, du ressort des fonctions elliptiques. Les développements de celles-ci me donnent, par exemple,

$$\begin{aligned}\left(\frac{2\mathrm{K}}{\pi}\right)^2&=1+\frac{8q}{1-q}+\frac{16q^2}{1+q^2}+\frac{24q^3}{1-q^3}+\frac{32q^4}{1+q^4}+\ldots\\&=1+\frac{8q}{(1-q)^2}+\frac{8q^2}{(1+q^2)^2}+\frac{8q^3}{(1-q^3)^2}+\frac{8q^4}{(1+q^4)^2}+\ldots\\&=1+8\Sigma\varphi(p)(q^p+3q^{2p}+3q^{4p}+3q^{8p}+3q^{16p}+3q^{32p}+\ldots),\end{aligned}$$

p étant un nombre impair quelconque, et $\varphi(p)$ la somme des facteurs de p. Comme dans cette série il ne manque aucune puissance de p, et qu'on a en même temps

$$\left(\frac{2K}{\pi}\right)^2 = (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots)^4,$$

il suit comme corollaire de cette formule le fameux théorème de Fermat, que chaque nombre est la somme de quatre carrés. Les théorèmes relatifs aux nombres qui sont la somme des deux carrés découlent de la formule suivante :

$$\begin{aligned}\frac{2K}{\pi} &= (1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + 2q^{16} + \ldots)^2 \\ &= 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1-q^3} + \frac{4q^5}{1-q^5} - \frac{4q^7}{1-q^7} + \ldots \\ &= 1 + \frac{4q}{1-q} - \frac{4q^3}{1+q^2} + \frac{4q^6}{1-q^3} - \frac{4q^{10}}{1+q^4} + \frac{4q^{15}}{1-q^5} - \frac{4q^{21}}{1+q^6} + \ldots.\end{aligned}$$

Parmi d'autres formules, je trouve encore la suivante, digne de vous être communiquée :

$$\begin{aligned}&(q - q^{5.5} - q^{7.7} + q^{11.11} + q^{13.13} - q^{17.17} - q^{19.19} + q^{23.23} + \ldots)^3 \\ &= q^3 - 3q^{3.3.3} + 5q^{3.5.5} - q^{3.7.7} + 9q^{3.9.9} - 11q^{3.11.11} + \ldots,\end{aligned}$$

dont vous saisirez aisément la loi. Elle résulte de la transformation attachée au nombre 3.

Ne vous fait-il pas de plaisir, Monsieur, de voir se rapprocher l'une à l'autre deux théories si hétérogènes en apparence et qui se datent en quelque sorte de vos travaux?

Je vais ajouter quelques remarques isolées telles qu'elles se présentent à mon esprit. Rappelons la formule donnée dans ma dernière lettre :

$$\begin{aligned}&\sqrt{x}\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} \\ &= \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x - 2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x + \ldots}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x - \ldots}.\end{aligned}$$

Il m'a paru d'importance de pouvoir exprimer à part le numérateur et le dénominateur de cette expression au moyen des fonctions elliptiques, ce qui n'est pas facile.

En me servant de vos signes, et mettant F^1 au lieu de K, $\varphi = \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$, et par conséquent $\frac{2Kx}{\pi} = F$, je trouve

$$1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + 2q^{16}\cos 8x - \ldots$$
$$= \sqrt{\frac{2\varkappa' F^1}{\pi}}\, e^{\int \frac{F^1 E - E^1 F}{F^1 \Delta(\varphi)} d\varphi},$$

l'intégrale étant prise depuis zéro jusqu'à φ.

L'un de vos plus beaux théorèmes est que l'expression

$$\int \frac{\varkappa^2 \sin A \cos A \Delta(A) \sin^2\varphi\, d\varphi}{(1 - \varkappa^2 \sin^2 A \sin^2\varphi)\Delta(\varphi)} - \frac{F(\varphi)}{F^1}[F^1 E(A) - E^1 F(A)]$$

ne change pas de valeur si l'on échange entre eux les angles φ et A. Or étant mis $A = \operatorname{am} \frac{2K\alpha}{\pi}$, $\varphi = \operatorname{am} \frac{2Kx}{\pi}$, je la trouve égale à

$$\frac{1}{2}\log\left[\frac{1 - 2q\cos 2(x-\alpha) + 2q^4\cos 4(x-\alpha) - 2q^9\cos 6(x-\alpha) + 2q^{16}\cos 8(x-\alpha) - \ldots}{1 - 2q\cos 2(x+\alpha) + 2q^4\cos 4(x+\alpha) - 2q^9\cos 6(x+\alpha) + 2q^{16}\cos 8(x+\alpha) - \ldots}\right],$$

formule symétrique en x et α. *D'ailleurs elle montre que les fonctions elliptiques de troisième espèce dans lesquelles entrent trois variables se ramènent à d'autres transcendantes qui n'en ont que deux*, découverte qui vous intéressera beaucoup.

Mes recherches seront rassemblées dans un petit Ouvrage d'environ 200 pages in 4°, qui sera imprimé à part et dont l'impression vient d'être commencée. Il aura pour titre : *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum*. Peut-être je serai assez heureux de vous le présenter moi-même.

Il faut avouer, Monsieur, que je suis un peu fatigué de la matière, qui m'a occupé pendant dix-huit mois presque jour et nuit. Cependant la fin de mon Ouvrage ne doit pas être celle de mes recherches; il en reste encore d'une grande importance, mais aussi d'une grande difficulté. Je vous prie instamment de me donner des nouvelles de vous et surtout de votre santé. Vous pourriez compter sur une prompte réponse.

Votre très-humble et très-dévoué,

C.-G.-J. Jacobi.

M. Bessel vous rend grâce de vos civilités; je vous prie d'en faire de ma part à M. Cauchy, dont j'ai toujours estimé de préférence les écrits ingénieux et d'une rare subtilité. Les formules analytiques qui renferment le théorème de Fermat ne seront pas sans intérêt pour ce géomètre, qui a tant de mérite dans cette partie de la théorie des nombres.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 15 octobre 1828.

Je vous envoie, Monsieur, un premier Supplément à mon Traité, contenant vos deux théorèmes généraux sur la transformation de la fonction elliptique de première espèce. Ce qu'il y aura de bon dans ce supplément vous appartient; je ne suis en quelque sorte que votre commentateur, parfois long et diffus, parce qu'il faut plus de développements dans un Traité que dans un Mémoire. D'ailleurs je me suis complu dans l'énumération des beaux résultats d'Analyse qu'on était loin de soupçonner avant que vous les eussiez fait connaître. Le célèbre astronome Plana, de Turin, qui est en même temps un géomètre très-distingué, vient de rendre hommage à vos découvertes dans un écrit où il fait des efforts pour parvenir méthodiquement à vos théorèmes. S'il n'a pas très-bien réussi, c'est une preuve de plus de la difficulté que vous avez trouvé le moyen de surmonter.

Le voyage que je projetais n'a pas eu lieu. Je suis resté, et j'ai profité d'un intervalle de quelques mois où ma santé s'est un peu améliorée pour travailler à mon Supplément. J'y ai employé le peu de forces qui me restent; car déjà mon catarrhe menace de me ressaisir, et je pourrais bientôt être hors d'état de m'occuper d'un second Supplément. Au reste, le monde savant n'y perdra rien, et je puis me reposer sur le zèle de deux athlètes infatigables tels que vous et M. Abel. Ce dernier a publié, dans le *Journal de M. Crelle*, la suite de son beau Mémoire, où, entre autres choses fort intéressantes, on trouve la démonstration de votre théorème général de transformation, démonstration que vous avez la modestie de placer au-dessus de la vôtre. Il a ensuite publié, dans le *Journal de*

M. Schumacher, d'autres recherches, où il montre beaucoup de profondeur et de sagacité. Pour vous, Monsieur, vous n'êtes pas resté en arrière, et vous avez continué de publier, dans ces deux Recueils, un grand nombre de résultats nouveaux qui doivent intéresser au plus haut degré les analystes, surtout lorsque vous en aurez fait connaître les démonstrations.

Votre Lettre du 9 septembre m'apprend d'autres particularités sur vos travaux. J'y ai vu surtout avec un grand plaisir que vous avez commencé l'impression d'un ouvrage in-4° de 200 pages qui sera intitulé : *Fundamenta nova theoriæ,* etc. Je serai doublement satisfait si je puis recevoir cet Ouvrage de votre main, comme vous me le faites espérer, et il me sera bien agréable de voir, de mes yeux, l'un des deux jeunes géomètres qui, par leurs découvertes, ont contribué le plus à perfectionner mes travaux.

J'induis de vos expressions que la composition de votre Ouvrage est terminée, et qu'ainsi nous pourrons en jouir bientôt. Il me sera très-utile pour y prendre la matière de deux ou trois Suppléments que je voudrais joindre à mon Traité pour le mettre au courant de vos nouvelles découvertes. Je commencerais ainsi un troisième volume qui ne serait pas inférieur aux deux autres; et, comme vous traiterez sans doute de la plupart des objets dont M. Abel s'est occupé, votre Ouvrage me dispensera de recourir à ceux de M. Abel, dont la manière, quoique très-méthodique, me paraît difficile à saisir. Je n'aime point ses fonctions f et F, et je pense que dans vos explications, dont vous m'avez déjà donné un échantillon, vous trouverez moyen de vous en passer.

J'applaudis à la théorie que vous donnez de l'équation modulaire et que vous regardez comme complète; j'y applaudirai encore mieux quand je connaîtrai vos démonstrations. C'est un grand point à mes yeux d'avoir prouvé que, pour le nombre premier p, l'équation modulaire est toujours du degré $p+1$. Vous donnez par des séries très-élégantes les racines de cette équation dont deux seulement sont réelles. Celles-ci sont le module h qui suit le module donné k, et le module k_1 qui le précède, en sorte que trois termes consécutifs de l'échelle sont k_1, k, h. J'en conclus que, si l'on se servait de l'équation modulaire pour calculer les autres termes de l'échelle, l'équation à résoudre pour passer d'un terme au suivant ne serait que du degré p. Il reste à examiner si les auxiliaires α_m et β_m, qui entrent dans les formules de vos deux théorèmes, peuvent être déterminées par les termes connus de l'échelle, comme cela a lieu pour le cas de $p = 5$, ou si elles exigent la résolution d'une équation, et quel est le degré réduit de cette équation. M. Abel dit qu'elle est du degré $p + 1$ (sans supposer connus les termes de l'échelle); mais cela n'est pas encore démontré, et c'est un point qu'il faudrait éclaircir pour la perfection de votre théorie.

Si j'ai gardé le silence jusqu'ici sur les belles séries en fonctions de q, que vous êtes parvenu à sommer et qui seront un des plus beaux ornements de votre Ouvrage, c'est que j'attendais que vous en donnassiez la démonstration. Du reste, je les regarde comme un nouveau titre que vous avez acquis à l'estime des savants, et il en est de même de vos nouvelles fonctions Θx et $\mathrm{H} x$, avec lesquelles vous avez réussi à exprimer très-simplement une fonction de la troisième espèce qui se rapporte à l'espèce de paramètre que j'ai nommé *logarithmique*. Il vous sera sans doute également facile d'exprimer semblablement la fonction qui se rapporte au paramètre *circulaire;* vous avez découvert en tout cela une nouvelle mine fort intéressante à exploiter et qui mène à un grand nombre de résultats curieux. Remarquons cependant que la théorie des transformations doit son élégance et l'on peut dire sa perfection à ce qu'elle est indépendante des idées et que tout s'y détermine algébriquement.

Je remarque au surplus que votre possession à vous et à M. Abel est maintenant bien assurée. L'envahisseur, M. G..., ne s'avisera point, je pense, d'écrire qu'il avait trouvé tout cela longtemps avant vous; car s'il disait pareille chose, il se ferait moquer de lui.

J'ai vu que vous aviez acquis le titre de professeur dans votre Université; je vous en fais mon compliment bien sincère; car rien de ce qui touche à votre avancement et à vos succès ne saurait m'être indifférent.

Votre dévoué serviteur,

LEGENDRE.

Jacobi à Legendre.

Königsberg, le 18 janvier 1829.

Monsieur,

Il faut que vous soyez assez fâché de moi à cause du grand retard de ma réponse à votre dernière lettre, et je ne saurais à peine m'excuser si ce n'est que j'ai voulu finir, avant de vous répondre, plusieurs travaux très-difficiles sur les *Fonctions elliptiques,* pour pouvoir vous en mander les résultats. Je ne veux vous parler à présent que du problème le plus important de ceux que je suis parvenu à résoudre dans ces derniers temps : c'est la résolution algébrique et générale de l'équation du degré n^2, de laquelle dépend la division de la fonction elliptique en n parties égales. Je vous prie, Monsieur, de me permettre d'entrer là-dessus dans un grand détail.

Après que vous aviez résolu, le premier, l'équation du neuvième degré, de laquelle dépend la trisection des fonctions elliptiques, nous remarquâmes en même temps, M. Abel et moi, que l'on peut généralement réduire l'équation algébrique du degré n^2, de laquelle dépend la $n^{\text{ième}}$ section, à deux équations du $n^{\text{ième}}$ degré seulement. Ce résultat était une conséquence de la remarque que j'avais faite, que l'on peut parvenir à la multiplication en appliquant à la fonction elliptique deux transformations l'une après l'autre. En lisant avec attention le premier Mémoire de M. Abel sur les *fonctions elliptiques,* on reconnaît aisément qu'il a effectivement suivi la même route, sans cependant soupçonner, lors du temps qu'il composa son Mémoire, que c'était le *medium* des transformations par lequel il passa. Soit $z = \sin \operatorname{am}(nu)$, $x = \sin \operatorname{am}(u)$, n étant un nombre impair quelconque ; si l'on a

$$(1) \qquad z = \frac{b' y + b''' y^3 + \ldots + b^{(n)} y^n}{b + b'' y^2 + \ldots + b^{(n-1)} y^{n-1}},$$

$$(2) \qquad y = \frac{a' x + a''' x^3 + \ldots + a^{(n)} x^n}{a + a'' x^2 + \ldots + a^{(n-1)} x^{n-1}},$$

y étant le sinus amplitude de la fonction transformée, il faut, d'après ce que je viens de dire, pour avoir x en z, exprimer en premier lieu x en y, en résolvant algébriquement l'équation (2); puis, en résolvant encore l'équation (1), il faut exprimer par z toutes les fonctions de y qui se trouveront sous les radicaux. Or, comme on a toujours plusieurs transformations qui répondent à un même nombre n, on trouvera, de cette manière, différentes formules algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section, d'après les différentes transformations par lesquelles on est passé à la multiplication. On pouvait cependant soupçonner qu'il y avait une manière d'exprimer x en z plus simple et qui n'était qu'unique. J'ai fait connaître cette forme la plus simple sous laquelle on peut présenter les expressions algébriques pour la $n^{\text{ième}}$ section, dans une petite addition faite au premier Mémoire sur les *Fonctions elliptiques,* et laquelle se trouve dans le *Journal de M. Crelle,* t. 3. Elle est fondée sur une formule très-remarquable, et dont je veux vous parler en peu de mots.

Partons des deux formules connues pour la transformation des fonctions elliptiques, qui donnent ensemble la multiplication :

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\varkappa M}\sin\operatorname{am}\left(\dfrac{u}{M}, \lambda\right) = \sin\operatorname{am}(u) + \sin\operatorname{am}\left(u + \dfrac{4K}{n}\right) + \ldots \\ \qquad\qquad + \sin\operatorname{am}\left[u + \dfrac{4(n-1)K}{n}\right], \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{n\varkappa M}{\lambda}\sin\operatorname{am}(nu) = \sin\operatorname{am}\left(\dfrac{u}{M}, \lambda\right) + \sin\operatorname{am}\left(\dfrac{u}{M} + \dfrac{4iK'}{nM}, \lambda\right) + \ldots \\ \qquad\qquad + \sin\operatorname{am}\left[\dfrac{u}{M} + \dfrac{4(n-1)iK'}{nM}, \lambda\right], \end{cases}$$

i étant $\sqrt{-1}$. Au moyen de l'équation (1), on tire de la formule (2) celle qui suit :

$$(3)\qquad n\sin\operatorname{am}(nu) = \Sigma\sin\operatorname{am}\left(u + \frac{mK + m'iK'}{n}\right),$$

en donnant à m, m' les valeurs $0, 1, 2, \ldots, n-1$. Cette dernière formule a été déjà donnée par M. Abel.

Dans le cas de n premier, le seul que nous considérons pour plus de simplicité, on a $n+1$ formules analogues à la formule (1), et qui répondent aux diverses transformations du module $\varkappa$, attachées au nombre n. Elles sont contenues toutes sous la formule générale

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right) &= \sin\operatorname{am}(u)+\sin\operatorname{am}(u+4\omega)+\ldots\\ &\quad+\sin\operatorname{am}[u+4(n-1)\omega],\end{aligned}\right.$$

ω ayant une des $n+1$ valeurs suivantes :

$$\frac{K}{n},\ \frac{iK'}{n},\ \frac{iK'}{n}+\frac{2K}{n},\ \frac{iK'}{n}+\frac{4K}{n},\ldots,\ \frac{iK'}{n}+\frac{2(n-1)K}{n},$$

et les quantités λ, M étant déterminées de la même manière par ω qu'elles sont déterminées par $\frac{K}{n}$ dans la formule (1). Nommons les valeurs de λ, M qui répondent à ces différentes valeurs de ω,

$$\lambda,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ldots,\ \lambda_n;\quad M,\ M_1,\ M_2,\ M_3,\ldots,\ M_n;$$

si l'on ajoute ensemble les $n+1$ quantités suivantes :

$$\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right),\quad \frac{\lambda_1}{\varkappa M_1}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_1},\lambda_1\right),$$
$$\frac{\lambda_2}{\varkappa M_2}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_2},\lambda_2\right),\ldots,\ \frac{\lambda_n}{\varkappa M_n}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_n},\lambda_n\right),$$

en substituant pour chacune sa valeur tirée de l'équation générale (4), on trouve

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}&\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\frac{\lambda_1}{\varkappa M_1}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_1},\lambda_1\right)+\ldots+\frac{\lambda_n}{\varkappa M_n}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_n},\lambda_n\right)\\ &\quad= n\sin\operatorname{am}(u)+\Sigma\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{4mK+4m'iK'}{n}\right)\\ &\quad= n\sin\operatorname{am}(u)+n\sin\operatorname{am}(nu).\end{aligned}\right.$$

En effet, on voit aisément qu'il se trouve, dans la somme dont on parle, tous les termes de l'expression $\Sigma\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{4mK+4m'iK'}{n}\right)$, et qu'ils ne s'y trouvent qu'une seule fois, excepté seulement le terme $\sin\operatorname{am}(u)$, qui s'y trouve $n+1$ fois. De l'équation (5) on tire celle qui suit:

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}&\sin\operatorname{am}(u)\\ &=\frac{\frac{\lambda}{\varkappa M}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M},\lambda\right)+\frac{\lambda_1}{\varkappa M_1}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_1},\lambda_1\right)+\ldots+\frac{\lambda_n}{\varkappa M_n}\sin\operatorname{am}\left(\frac{u}{M_n},\lambda_n\right)-n\sin\operatorname{am}(nu)}{n}.\end{aligned}\right.$$

C'est la formule remarquable dont j'ai parlé, et qui est de la plus grande importance dans la théorie de la division des fonctions elliptiques. En effet, lorsqu'il s'agit d'exprimer $\sin \operatorname{am}(u)$ par $\sin \operatorname{am}(nu)$, on n'a plus qu'à exprimer par $\sin \operatorname{am}(nu)$ les quantités $\sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M_p}, \lambda_p\right)$, ce qui se fait par la résolution d'équations algébriques du $n^{\text{ième}}$ degré seulement. Je vais rapporter à présent les expressions algébriques et générales des racines de ces dernières.

Soit toujours $\sin \operatorname{am}(nu) = z$, et désignons par $\Phi(nu, \omega)$ l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\Phi(nu, \omega) = (1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} 4\omega\, z^2)(1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} 8\omega\, z^2)\ldots \\ \times (1 - \varkappa^2 \sin^2 \operatorname{am} 2(n-1)\omega\, z^2);\end{aligned}$$

nommons de plus $A^{(p)}$ l'expression suivante :

$$A^{(p)} = \frac{\Phi(4p\omega, \omega)\,\Phi(nu, \omega)}{\Phi(nu + 4p\omega, \omega)};$$

je dis qu'on a

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\lambda}{\varkappa M} \sin \operatorname{am}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right) \\ &= \sin \operatorname{am}(nu) + \sin \operatorname{am}(nu + 4\omega)\sqrt[n]{A'} + \sin \operatorname{am}(nu + 8\omega)\sqrt[n]{A''} + \ldots \\ &\quad + \sin \operatorname{am}[nu + 4(n-1)\omega]\sqrt[n]{A^{(n-1)}}.\end{aligned}\right.$$

Les quantités $A^{(p)}$ seront de la forme $P + Q\sqrt{(1 - z^2)(1 - \varkappa^2 z^2)}$, P et Q étant des fonctions rationnelles de z.

Voici une formule entièrement nouvelle pour la transformation des fonctions elliptiques, et laquelle ne pourra être déduite d'aucune façon des formules connues jusqu'ici, quoique, une fois trouvée, on pût la vérifier par les premiers éléments de la théorie des fonctions elliptiques, et même sans supposer connues les formules de transformation ordinaires. La découverte de cette formule m'a coûté beaucoup de peine, et c'est peut-être pourquoi je voudrais la compter pour le résultat le plus important de tout ce que j'ai trouvé jusqu'ici.

Les formules (6) et (7) donnent aussitôt les formules algébriques et générales pour exprimer $\sin \operatorname{am}(u)$ par $\sin \operatorname{am}(nu)$. Nommons, pour cet effet, ω, ω_1, $\omega_2, \ldots$, ω_n les différentes valeurs de ω qui répondent aux différents modules transformés λ, λ_1, $\lambda_2, \ldots$, λ_n, et soit $A_m^{(p)}$ une expression qui dépend de la même manière de ω_m que $A^{(p)}$ dépend de ω; on trouve

$$\begin{aligned}
&n \sin \mathrm{am}(u)\\
&\quad = \sin \mathrm{am}(nu)\\
&\quad + \sin \mathrm{am}(nu + 4\omega)\sqrt[n]{A'} + \sin \mathrm{am}(nu + 8\omega)\sqrt[n]{A''} + \ldots\\
&\quad + \sin \mathrm{am}[nu + 4(n-1)\omega]\sqrt[n]{A^{(n-1)}}\\
&\quad + \sin \mathrm{am}(nu + 4\omega_1)\sqrt[n]{A'_1} + \sin \mathrm{am}(nu + 8\omega_1)\sqrt[n]{A''_1} + \ldots\\
&\quad + \sin \mathrm{am}[nu + 4(n-1)\omega_1]\sqrt[n]{A_1^{(n-1)}}\\
&\quad + \sin \mathrm{am}(nu + 4\omega_2)\sqrt[n]{A'_2} + \sin \mathrm{am}(nu + 8\omega_2)\sqrt[n]{A''_2} + \ldots\\
&\quad + \sin \mathrm{am}[nu + 4(n-1)\omega_2]\sqrt[n]{A_2^{(n-1)}}\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\quad + \sin \mathrm{am}(nu + 4\omega_n)\sqrt[n]{A'_n} + \sin \mathrm{am}(nu + 8\omega_n)\sqrt[n]{A''_n} + \ldots\\
&\quad + \sin \mathrm{am}[nu + 4(n-1)\omega_n]\sqrt[n]{A_n^{(n-1)}}.
\end{aligned}$$

C'est l'expression algébrique pour la $n^{\text{ième}}$ section des fonctions elliptiques, laquelle est composée, comme on voit, de

$$(n+1)(n-1) = n^2 - 1$$

$n^{\text{ièmes}}$ racines; les quantités qui se trouvent sous les radicaux sont toutes de la forme $P + Q\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}$, P et Q étant des fonctions rationnelles de z. Vous trouverez ce résultat parmi d'autres dans le *Journal de M. Crelle;* du nombre de ces derniers sont les formules générales pour la transformation des fonctions elliptiques de la seconde et de la troisième espèce. Les limites d'une lettre ne me permettent pas d'entrer, dans ce moment, dans un plus grand détail. Je vous entretiendrai une autre fois de la manière dont je suis parvenu à la formule (7), laquelle pourra paraître assez étrangère, comme elle est fondée sur la considération des séries, et surtout sur les propriétés remarquables de mes nouveaux transcendants H, Θ, au moyen desquels on peut exprimer rationnellement tous les radicaux. Ainsi, par exemple, ω étant $= \frac{K}{n}$, on a

$$\sqrt[n]{\mathrm{A}^{(p)}} = \frac{\Theta(\mathrm{o})\Theta\left(nu + \dfrac{4p\mathrm{K}}{n}\right)}{\Theta\left(\dfrac{4p\mathrm{K}}{n}\right)\Theta(nu)},$$

$$\Theta(u) \text{ étant } \sqrt{\frac{2\varkappa'\mathrm{K}}{\pi}}\, e^{\int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{F}^1\mathrm{F}-\mathrm{E}^1\mathrm{F}}{\mathrm{F}^1\Delta} d\varphi}, \qquad \varphi = \mathrm{am}\,(u).$$

Cependant, eomme je l'ai dit, on peut aussi vérifier la formule (7) en quantités finies.

A cause de l'extension inattendue qu'ont prise mes travaux, je partagerai mon Ouvrage en deux Parties, dont la première sera publiée dans trois mois environ : je vous en ferai hommage dès que son impression sera achevée. Dans des Notes et des Additions jointes à la première Partie, j'exposerai ce qui est particulier à M. Abel, en rapprochant les méthodes de cet auteur de celles dont j'ai fait usage moi-même.

Il faut vous rendre encore mille grâces pour l'envoi de votre premier Supplément : tout ce qu'il contient vous appartient sous tant de titres que ce n'est que votre bonté qui m'y a fait prendre tant de part. C'est encore à vous, Monsieur, que je suis redevable de la place de professeur dont vous êtes assez obligeant de me féliciter. Une gazette de Berlin ayant fait mention de la communication que vous avez faite à votre Académie de mes travaux, l'autorité de votre nom a été la cause que le Ministre m'a placé.

Vous m'avez donné de grandes inquiétudes sur votre santé dans votre dernière Lettre; il faut que vous m'en arrachiez sitôt qu'il vous sera possible : je vous en prie instamment.

Ce serait trop me punir pour le retard de ma réponse par un retard de votre côté; c'est la division des fonctions elliptiques qu'il faut accuser là-dessus.

Votre entièrement dévoué serviteur,

C.-G.-J. Jacobi.

Je vous prie, Monsieur, de faire parvenir la lettre ci-adjointe au célèbre orientaliste, M. Klaproth; veuillez me pardonner si j'ose vous faire tant de peine.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 9 fevrier 1829.

Monsieur,

Votre lettre du 18 janvier, que j'ai reçue le 30, m'a fait beaucoup de plaisir; l'intérêt de cette correspondance va toujours en augmentant par le nombre et l'importance des découvertes dont vous me donnez communication. Je ne puis lire qu'avec peine les formules, parce que l'espace vous manque et le temps peut-être, pour bien former les caractères; mais ce que j'y puis apercevoir me donne la plus haute idée des beaux résultats auxquels vous êtes parvenu pour la division des fonctions en n parties. Je n'aurais jamais imaginé qu'il fût possible de résoudre ainsi explicitement une équation du degré nn, et de former, d'une manière praticable, les différents termes de la formule. C'est un grand tour de force qui vous fera infiniment d'honneur, et il me tarde de recevoir l'Ouvrage où vous donnerez des développements assez étendus sur cette découverte, pour que j'en puisse faire mon profit et l'insérer dans mes Suppléments, après que je l'aurai moi-même suffisamment comprise.

De son côté, M. Abel publie, d'une manière assez suivie, des Mémoires qui sont de véritables chefs-d'œuvre, et, comme il n'a pas à sa disposition les moyens de faire imprimer l'ensemble de ses recherches, cette raison le détermine à développer davantage ce qu'il publie dans les journaux de MM. Crelle et Schumacher. Il obtient ainsi sur vous une sorte d'avantage, parce que vous n'avez guère publié jusqu'à présent que des Notices qui ne font pas connaître vos méthodes. C'est une raison pour que vous vous hâtiez de prendre possession de ce qui vous appartient, en faisant paraître votre Ouvrage le plus tôt qu'il vous sera possible.

La question de la n-section des fonctions elliptiques, abstraction faite des formules de solution dont vous avez fait la découverte, se réduit pour moi aux deux équations du degré n que fournissent les deux théorèmes de transformation, et, de plus, aux équations nécessaires pour diviser en n parties égales les deux fonctions complètes $F^1 k$, $F^1 h'$, où je désigne par h le module qui suit k, dans l'échelle rapportée au nombre n. Ces dernières équations, pour déterminer les fonctions trigonométriques des amplitudes α_m, β_m, sont un objet que vous ne me paraissez pas encore avoir traité d'une manière satisfaisante, ni vous, ni M. Abel ; cependant elles fournissent les constantes qui entrent dans les coefficients de vos équations, et, par suite, dans les résultats définitifs. Comment donc trouve-t-on les constantes ? Vous avez annoncé que, pour passer du module donné k au module transformé h, il faut résoudre ce que vous appelez l'équation des modules, que vous dites être du degré $n+1$, et dont vous avez même donné les racines. Mais cette assertion ne me semble pas encore établie d'une manière tout à fait rigoureuse, et il reste toujours à trouver quel est le degré des équations à résoudre pour déterminer les constantes dont j'ai parlé. Pour la valeur particulière $n = 5$, les constantes dont il s'agit se déduisent simplement de la valeur de h, sans exiger la résolution d'aucune équation composée ; mais il n'en est pas probablement de même dans tous les cas, et vous m'obligeriez beaucoup, Monsieur, de me dire ce que vous savez, au moins en partie, sur la solution de cette difficulté. Vous l'avez résolue sûrement, sans quoi votre formule générale de solution contiendrait des coefficients que vous ne pourriez déterminer.

Je répéterai volontiers que cette formule, telle que vous l'annoncez, est la plus belle chose que je connaisse dans l'Analyse. M. Abel en avait annoncé une semblable de son côté ; mais sa formule est représentée d'une manière bien vague ; elle n'existe en quelque sorte qu'idéalement, tandis que vous lui avez donné une existence réelle et palpable, dans tout son développement.

En admirant ces belles formules de solution dites *algébriques*, c'est-à-dire composées de radicaux du degré n, imposés sur des quantités en partie réelles et en partie imaginaires, les savants reconnaîtront que vous avez beaucoup généralisé les solutions analogues qu'ont données Gauss et Vandermonde des équations à deux termes, ou plutôt des équations auxiliaires dont elles dépendent. — Nous conviendrons tous ensuite que ces formules, si belles en théorie, ne sont d'aucune utilité en pratique pour les solutions effectives. Car, indépendamment de la grande difficulté d'évaluer chaque radical en particulier du degré n, il se présente une autre difficulté à peu près insurmontable, qui est de savoir laquelle des

n valeurs de chaque radical devra être combinée avec les valeurs des autres. M. Gauss a laissé cette théorie fort imparfaite en ne donnant aucune réponse à cette question, qui deviendra bien plus difficile encore à résoudre pour vos $n^2 - 1$ radicaux.

L'espace ne me permet plus que de vous parler succinctement de deux choses. J'ai reçu de M. Abel une lettre fort intéressante, où il me parle d'une grande extension qu'il a donnée à ses recherches, en prouvant que des propriétés analogues à celles des fonctions elliptiques peuvent s'appliquer à des transcendantes beaucoup plus composées. C'est une grande généralisation de la belle intégrale d'Euler. On trouve un très-bel échantillon de ces nouvelles recherches dans le 4[e] cahier du *Journal de M. Crelle,* t. 3, p. 313. — En second lieu, il m'assure être en possession d'une méthode par laquelle il peut résoudre *algébriquement* toute équation donnée qui satisfait aux conditions nécessaires pour être ainsi résolue. Il s'ensuit que la solution générale est impossible passé le quatrième degré.

Adieu, Monsieur, recevez l'assurance de mon très-sincère attachement.

LEGENDRE.

Jacobi à Legendre.

Königsberg, le 14 mars 1829.

MONSIEUR,

Je vous remercie mille fois de votre lettre du 9 février, et, comme vous m'y proposez diverses questions, je veux chercher à y répondre. Vous supposez que j'ai trouvé des moyens à exprimer algébriquement les fonctions trigonométriques des amplitudes que vous désignez par α_m, en ajoutant que sans cela ma formule contiendrait des coefficients que je ne pourrai déterminer. Mais, Monsieur, ce que vous désirez est une chose *tout à fait impossible* dans le cas général, et qui ne s'exécute que pour des valeurs spéciales du module.

Ma formule, qui donne l'expression algébrique de sin am (u) au moyen de sin am (nu), suppose connue la section de la fonction entière. C'est ainsi qu'on savait résoudre algébriquement depuis plus d'un siècle les équations qui se rapportent à la division d'un arc de cercle, toutefois en supposant connue celle de la circonférence entière, cette dernière n'étant donnée généralement que dans ces derniers temps par les travaux de M. Gauss.

M. Abel a traité, dans son premier *Mémoire sur les fonctions elliptiques*, le problème en question pour la première fois d'une manière générale; il a montré qu'il est toujours possible de réduire la division de la fonction indéfinie à celle de la fonction entière; ensuite il a montré que l'équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, de laquelle dépend cette dernière, se réduit à une équation du degré $\frac{n-1}{2}$ dont les coefficients dépendent d'une autre équation du degré $n+1$, n étant premier. En effet, l'équation du degré n^2 entre $\sin\operatorname{am}(u)$ et $\sin\operatorname{am}(nu)$ a pour racines les n^2 expressions contenues sous la forme $\sin\operatorname{am}\left(u+\frac{2m\mathrm{K}+2im'\mathrm{K}'}{n}\right)$, où l'on donne à m, m' les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$.

En supposant $u=0$, une racine devenant $\sin\operatorname{am}(u)=0$ et les autres devenant égales deux à deux, mais de signes opposés, l'expression $\sin^2\operatorname{am}\left(\frac{2m\mathrm{K}+2im'\mathrm{K}'}{n}\right)$ ne dépend plus que d'une équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, comme vous l'avez montré par des exemples dans vos Traités.

Supposons n premier, et soit $\frac{m\mathrm{K}+m'i\mathrm{K}'}{n}=\omega$; on prouve aisément qu'une fonction symétrique quelconque de $\sin^2\operatorname{am}(2\omega)$, $\sin^2\operatorname{am}(4\omega)$, ..., $\sin^2\operatorname{am}[(n-1)\omega]$, par exemple celle-ci :

$$\sin^4\operatorname{coam}2\omega.\sin^4\operatorname{coam}4\omega\ldots\sin^4\operatorname{coam}(n-1)\omega\left(=\frac{\lambda}{\varkappa^n}\right),$$

ne peut obtenir plus que $n+1$ valeurs différentes, en mettant pour $\sin^2\operatorname{am}(2\omega)$ une quelconque des racines de l'équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$. Ces valeurs différentes répondent aux valeurs de $\omega=\mathrm{K}$, $i\mathrm{K}'$, $\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$, $2\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$, ..., $(n-1)\mathrm{K}+i\mathrm{K}'$. En effet, toutes les racines de l'équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$ étant contenues sous la forme

$\sin^2 \mathrm{am}(2p\omega)$, où l'on donne à p les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{n-1}{2}$, à ω les $n+1$ valeurs mentionnées, et le système des quantités $\sin^2 \mathrm{am}\, 2\omega$, $\sin^2 \mathrm{am}\, 4\omega, \ldots, \sin^2 \mathrm{am}\,(n-1)\omega$ pouvant être remplacé par le système de celles-ci :

$$\sin^2 \mathrm{am}(2p\omega), \sin^2 \mathrm{am}(4p\omega), \ldots, \sin^2 \mathrm{am}[(n-1)p\omega],$$

il suit que les fonctions symétriques de ces quantités ne sauront obtenir que les $n+1$ valeurs que l'on obtient en mettant pour ω des valeurs différentes et *incommensurables* entre elles. Donc elles dépendent d'une équation algébrique du degré $n+1$. C'est donc aussi le degré de l'équation dont les racines sont les différents modules transformés, attachés au nombre n supposé premier, et que j'appelle *æquatio modularis*, ces modules étant contenus sous la forme

$$\lambda = \varkappa^n [\sin \mathrm{coam}\, 2\omega \sin \mathrm{coam}\, 4\omega \ldots \sin \mathrm{coam}\,(n-1)\omega]^4.$$

Vous voyez donc, Monsieur, que M. Abel a prouvé ce théorème important, comme vous le nommez, dans son premier *Mémoire sur les fonctions elliptiques*, quoiqu'il n'y ait pas traité de la transformation, et qu'il ne paraît pas même avoir songé, du temps qu'il le composa, que ses formules et ses théorèmes trouveront une pareille application. Quant à moi, je n'ai pas trouvé nécessaire de reproduire cette démonstration dans les écrits que j'ai publiés jusqu'ici sur cette matière ; car il me reste trop à faire pour ne pas épargner mon temps le plus que possible.

Mais peut-être, Monsieur, vous aurez à faire des objections à cette démonstration. Dans ce cas, vous m'obligerez de beaucoup en me les communiquant ; car, lorsque je traiterai de mes théories nouvelles, il faudra en parler.

Étant connue une seule des fonctions symétriques de

$$\sin^2 \mathrm{am}(2\omega), \ldots,$$

la théorie générale des équations algébriques nous apprend, et M. Abel l'a remarqué, qu'il est possible d'exprimer par celle-ci toute autre fonction symétrique des mêmes quantités. C'est la cause de ce que vous avez pu exprimer rationnellement en fonction des deux modules les coefficients des transformations attachées aux nombres 3 et 5, et il en sera de même pour tout autre nombre. Vous trouverez même dans le 2ᵉ cahier du volume IV du *Journal de M. Crelle* une formule à différences partielles très-remarquable qui sert à exprimer *généralement* ces coefficients par les deux modules, en supposant connue l'équation aux modules ; de sorte que la formation algébrique des substitutions à faire pour parvenir à une transformation quelconque est entièrement réduite à la recherche des équations aux modules, formule qui donne en même temps, comme cas spécial, les expressions algébriques et générales pour la multiplication par un nombre n quelconque *indéfini :* chose très-difficile, et dont vous avez dû remarquer les premiers exemples dans le 4ᵉ cahier du volume III dudit Recueil. Il sera de même si l'on fait tout dépendre de l'équation dont les racines donnent les valeurs de ce que vous appelez le *régulateur*, et cela conviendra peut-être encore mieux, ces dernières semblant être plus simples. Aussi j'ai découvert une propriété tout à fait singulière de ces équations, dont les racines sont les régulateurs, comme vous l'aurez lu dans le 3ᵉ cahier du volume III : c'est qu'on peut exprimer linéairement leurs *racines carrées* au moyen de la moitié de leur nombre, propriété qui m'est d'autant plus remarquable que je ne l'ai trouvée que par les développements en séries qui me sont propres, et que je ne vois pas comment on peut la prouver en quantités finies, ce qui pourtant doit être possible. Cette propriété servira sans doute à approfondir un jour la vraie nature de ces équations du degré $n+1$.

J'ai été convaincu, et M. Abel l'a confirmé, qu'il n'est pas possible de résoudre algébriquement ces équations du degré $n+1$; aussi, comme M. Abel sait établir des critères nécessaires et suffisants pour qu'une équation algébrique peut être résolue, il pourra sans doute prouver cela avec toute la rigueur analytique. Quant aux cas spéciaux, comme M. Abel a promis en plusieurs lieux d'en traiter, je ne me suis pas encore occupé beaucoup de cet objet, sans doute très-intéressant. Je ne veux ni reproduire ni prévenir les travaux de M. Abel : presque tout ce que j'ai publié dans ces derniers temps sur les fonctions elliptiques contient des vues nouvelles ; ce ne sont pas des amplifications des matières dont M. Abel a traité ou même promis de s'en occuper.

Le module transformé ou, ce qui revient au même, le régulateur qui y répond étant supposé connu, il faut encore résoudre une équation du degré $\frac{n-1}{2}$ pour parvenir aux quantités $\sin^2 \operatorname{am}(2p\omega)$, ou à la section de la fonction entière. Donc vous n'aviez eu qu'à résoudre une équation du second degré dans le cas de $n = 5$. M. Abel a prouvé que la méthode de M. Gauss s'applique presque mot à mot à la résolution de ces équations, de sorte que ce ne sont que les équations aux modules qu'on ne sait pas résoudre algébriquement. J'ai trouvé le théorème remarquable, et je l'ai annoncé dans le 2e cahier du volume IV du Journal mentionné, qu'étant supposées connues *toutes les racines* de l'équation aux modules, ou tous les régulateurs qui répondent au nombre n, on peut exprimer les quantités $\sin \alpha_m$ *sans avoir besoin de résoudre encore aucune équation algébrique*. La méthode de M. Abel ne suppose connu qu'un seul module transformé pour trouver, par la résolution d'une équation algébrique du $\left(\frac{n-1}{2}\right)^{\text{ième}}$ degré, les quantités $\sin \alpha_m$ qui répondent à ce module ; la connaissance de *tous* les modules transformés remplacera donc la résolution de cette équation.

Je ne crois pas que la formule que j'ai eu l'honneur de vous communiquer dans ma dernière Lettre perde à vos yeux, à présent où vous voyez qu'elle contient des coefficients que je ne sais pas déterminer, mais en même temps qu'il est impossible de les déterminer algébriquement.

L'impression de mon Ouvrage s'est retardée, puisqu'il s'imprime à 200 lieues de Königsberg ; sans cela, il serait déjà dans vos mains ; cependant j'espère pouvoir vous le faire parvenir dans très-peu de temps. Il ne contiendra que les fondements de mes travaux ; je publierai le reste dans des Mémoires isolés, puisque cela paraît être plus conforme à vos vœux.

Quelle découverte de M. Abel que cette généralisation de l'intégrale d'Euler ! A-t-on jamais vu pareille chose ! Mais comment s'est-il fait que cette découverte, peut-être la plus importante de ce qu'a fait dans les Mathématiques le siècle dans lequel nous vivons, étant communiquée à votre Académie il y a deux ans, elle a pu échapper à l'attention de vous et de vos confrères ?

Vos lettres, Monsieur, font époque dans le cours de mes travaux.

Veuillez donc me daigner honorer bientôt d'une réponse, et, comme j'irai voir mes parents à Potsdam, je vous prie de l'adresser à cette ville. Je vous prie aussi de vouloir bien excuser mille inconvénients qui naissent de ce qu'il faut que j'écris dans une langue qui m'est étrangère.

Votre dévoué serviteur,

C.-G.-J. Jacobi.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 8 avril 1829.

Je vous remercie, Monsieur, de la peine que vous avez prise de répondre aux questions contenues dans ma Lettre précédente. Je vois maintenant plus clairement qu'auparavant comment vous êtes parvenus, M. Abel et vous, à démontrer que l'équation des modules doit être du degré $n+1$, et aussi pourquoi la division de la fonction complète en n parties, qui, en général, dépend d'une équation du degré $\frac{n^2-1}{2}$, se réduit à deux équations, l'une du degré $n+1$, l'autre du degré $\frac{n-1}{2}$. La démonstration de ces belles propriétés est encore enveloppée de quelques nuages, qui, j'espère, pourront se dissiper par un travail ultérieur, et avec le secours de ce que vous publierez sur cette matière; car votre manière d'écrire est plus claire pour moi que celle de M. Abel, qui, en général, ne me paraît pas suffisamment développée et laisse au lecteur beaucoup de difficultés à résoudre.

Je viens de recevoir le nouveau cahier du *Journal de M. Crelle* où il y a trois beaux Mémoires de M. Abel et un précis que vous m'aviez annoncé de vos nouvelles recherches. Vous allez si vite, Messieurs, dans toutes ces belles spéculations, qu'il est presque impossible de vous suivre; surtout pour un vieillard qui a déjà passé l'âge où est mort Euler, âge où l'on a nombre d'infirmités à combattre, et où l'esprit n'est plus capable de cette contention qui peut vaincre des difficultés et se plier à des idées nouvelles. Je me félicite néanmoins d'avoir vécu assez longtemps pour être témoin de ces luttes généreuses entre deux jeunes athlètes également vigoureux, qui font tourner leurs efforts au profit de la Science, dont ils reculent de plus en plus les limites. Ce spectacle m'intéresse d'autant plus qu'il m'offre les moyens de perfectionner mon propre Ouvrage, en profitant de quelques-uns des matériaux précieux qui sont le résultat de leurs savantes recherches.

Je finirai dans quelques jours l'impression de mon second Supplément, dont j'adresserai un exemplaire à Königsberg, pensant que vous y serez de retour à cette époque. Il est composé de presque toutes choses qui vous appartiennent, et qui m'ont cependant coûté beaucoup de travail, à cause des démonstrations que vous n'aviez pas toujours indiquées. Ce Supplément complète en quelque sorte la théorie des approximations, qui est l'un des objets principaux de mon Ouvrage; car, une fois les fonctions elliptiques connues, il faut faciliter par tous les moyens possibles leur application, c'est-à-dire la détermination numérique des fonctions. Je trouve que vous avez fait un grand pas dans cette carrière en réduisant les fonctions de la troisième espèce *à paramètre logarithmique* (j'appelle ainsi les fonctions dont le paramètre est $-\varkappa^2 \sin^2 \alpha$) de sorte qu'elles ne dépendent plus que de deux variables, et qu'ainsi on puisse les évaluer en joignant aux Tables connues une nouvelle Table à double entrée seulement. J'aurais bien voulu que la même propriété pût être étendue aux autres fonctions de la troisième espèce, c'est-à-dire à celles que j'appelle *à paramètre circulaire*, ou dont les paramètres sont des formes $\cot^2 \alpha$, $\varkappa'^2 \operatorname{tang}^2 \alpha$, et $-1 + \varkappa'^2 \sin^2 \alpha$; mais les efforts que j'ai faits pour parvenir à ce résultat ont été infructueux, quoique vous en ayez annoncé la possibilité. Je serais très-aise de m'être trompé, et je réparerais avec grand plaisir mon erreur si vous m'indiquiez le moyen de résoudre la difficulté et d'exprimer par deux variables seulement cette seconde division des fonctions de troisième espèce. Ce serait, à mon avis, la plus grande découverte qu'il est possible d'espérer dans la théorie des fonctions elliptiques, puisqu'elle rendrait l'usage de ces fonctions presque aussi facile, dans tous les cas, que celui des fonctions circulaires et logarithmiques. S'il faut perdre tout espoir à cet égard, j'aurai au moins la consolation que mes recherches sur votre découverte m'ont fourni l'occasion de perfectionner assez notablement le calcul approximatif des fonctions à paramètre circulaire, au moyen de mes arcs Ω et Ω', dont l'un au moins se détermine toujours par deux suites fort convergentes.

Je ne terminerai pas cette Lettre sans répondre à l'article de la vôtre qui concerne le beau Mémoire de M. Abel qui a été imprimé dans le cahier précédent du *Journal de Crelle*, et qui avait été présenté à l'Académie par son auteur dans les derniers mois de 1826. M. Poisson était alors président de l'Académie; les commissaires nommés pour examiner le Mémoire furent M. Cauchy et moi. Nous nous aperçûmes que le Mémoire n'était presque pas lisible : il était écrit en encre très-blanche, les caractères mal formés; il fut convenu entre nous qu'on demanderait à l'auteur une copie plus nette et plus facile à lire. Les choses en sont restées là; M. Cauchy a gardé le manuscrit jusqu'ici sans s'en occuper; l'auteur, M. Abel, paraît s'en être allé sans s'occuper de ce que devenait son Mémoire; il n'a pas fourni de copie, et il n'a pas été fait de Rapport. Cependant j'ai demandé à M. Cauchy qu'il me remette le manuscrit qui n'a jamais été entre mes mains, et je verrai ce qu'il y a à faire pour réparer, s'il est possible, le peu d'attention qu'il a donné à une production qui méritait sans doute un meilleur sort.

Votre tout dévoué,

LEGENDRE.

Jacobi à Legendre.

Potsdam, le 28 mai 1829.

MONSIEUR,

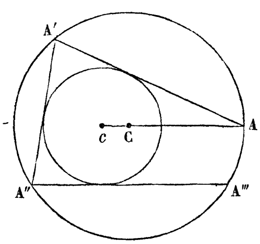
Je vous rends grâce de votre lettre du 8 avril qui me demande la publication d'un Supplément, que j'attends avec une grande impatience. Vos deux Suppléments embrasseront sans doute la plupart de ce qui se trouvera de nouveau et d'intéressant dans mon Ouvrage et beaucoup d'autres choses qui ne s'y trouvent pas. L'impression de celui-ci étant achevée, je me suis empressé de vous le faire parvenir, et je vous prie de l'accueillir avec cette bonté dont vous m'avez donné des preuves si éclatantes. Cependant je crains qu'il ne soit beaucoup au-dessous de la bonne opinion que vous avez voulu concevoir de mes travaux, et je crains cela d'autant plus, puisqu'il ne contient que les fondements de mes recherches et qu'il me faut encore une longue série de travaux pour établir aux yeux des géomètres leur ensemble.

En ce qui regarde les intégrales elliptiques de la troisième espèce à paramètre circulaire, vous avez complétement raison : elles ne jouissent pas d'une réduction analogue à celle de l'autre espèce logarithmique. Si j'ai annoncé une pareille chose, comme vous le dites dans votre lettre, cela n'a pu être que dans le sens général et analytique, où l'on ne distingue pas entre les valeurs réelles et imaginaires, et qu'on fait abstraction de l'évaluation numérique. Sous ce point de vue, une même formule embrasse tous les cas, de sorte qu'on n'a pas besoin de distinguer entre les espèces, ce qui devient nécessaire aussitôt qu'on veut appliquer les formules qui s'y rapportent au calcul numérique ou qu'on ne veut considérer que des quantités réelles. Toutefois cette sorte d'inconvénient, qui tient à la nature intime de l'objet, et nullement à un défaut de notre part, me paraît ajouter du mérite à votre division des intégrales elliptiques de la troisième espèce en deux classes, auxquelles se ramènent tous les autres cas. En effet, ces deux classes diffèrent essentiellement entre elles, le paramètre et l'amplitude dans l'une d'entre elles pouvant être réunis dans une seule variable, et l'autre pouvant être rapportée en même temps au module donné et à son complément. Je pourrais vous parler davantage sur cette matière, mais j'aime mieux voir auparavant votre second Supplément.

J'ai déjà communiqué à M. Crelle, pour le faire insérer dans son Journal, un premier Mémoire qui fait partie d'une suite de Mémoires dans lesquels je veux exposer, avec les démonstrations et les développements nécessaires, les différents résultats auxquels je suis parvenu, et dont j'ai déjà annoncé la plupart sans démonstration. Vous y trouverez les formules générales qui se rapportent à la transformation des intégrales elliptiques de la seconde et de la troisième espèce, présentées sous une forme commode et élégante. Vous y trouverez aussi les formules générales qui donnent leurs valeurs dans le cas que $F(\varphi)$ est commensurable avec la fonction entière F^1, ou plus généralement $= \dfrac{mF^1(\varkappa) + nF^1(\varkappa')\sqrt{-1}}{p}$, m, n, p étant des nombres entiers. Mais le but principal de ce premier Mémoire est de préparer tout ce qui est nécessaire pour que je puisse établir dans les Mémoires suivants, avec toute la rigueur nécessaire et en partant des premiers éléments, cette théorie des transformations irrationnelles ou inverses et de la section des fonctions elliptiques, qui me paraît être le comble de toutes mes recherches sur cette matière.

Dans un Mémoire écrit en allemand, et qui a été inséré dans le troisième volume du *Journal de M. Crelle,* j'ai donné une construction *plane* de la multiplication des fonctions elliptiques.

Soit A A′ A″ A‴... une partie d'un polygone inscrit au cercle C et circonscrit au cercle c, A étant situé dans le prolongement de Cc



ou de la droite qui joint les deux centres : si l'on met $AA' = 2\varphi_1$, $AA'' = 2\varphi_2$, $AA''' = 2\varphi_3$, ..., on aura

$$F(\varphi_2) = 2F(\varphi_1), \quad F(\varphi_3) = 3F(\varphi_1), \quad \ldots.$$

Le module se détermine par la distance du centre C à la sécante idéale commune aux deux cercles. Donc si l'on veut trouver un angle φ_n, tel que $F(\varphi_n) = nF(\varphi)$, on n'a qu'à décrire un cercle c, qui touche la droite AA′ et qui a une sécante idéale donnée commune avec le cercle C; ensuite on mène au cercle c les tangentes A′A″, A″A‴, A‴A$^{\text{iv}}$, ..., les points A″, A‴, A$^{\text{iv}}$, ... étant situés tous dans la périphérie du cercle C; la $n^{\text{ième}}$ tangente étant $A^{(n-1)}A^{(n)}$, on aura $AA_n = 2\varphi_n$. Les arcs de cercle peuvent devenir plus grands que 360 degrés, de sorte que cette construction n'a point de limites, comme celle de Lagrange. On voit ainsi que la théorie générale des polygones inscriptibles et circonscriptibles en même temps à un cercle dépend des fonctions elliptiques, comme celle des polygones réguliers des fonctions circulaires.

Pardonnez-moi si j'ose vous faire remarquer qu'il me semble que, dans votre premier Supplément, vous avez présenté d'une manière incomplète ma démonstration de mon premier théorème. Il me semble que de la seule circonstance que y se change en $\frac{1}{\lambda y}$, x étant changé en $\frac{1}{\varkappa x}$, vous concluez que la valeur de y, qu'on a supposée, satisfait à l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$

puisqu'on peut faire dans celle-ci cette substitution.

Mais je n'ai pas fait, moi, cette conclusion, que vous reconnaîtrez aisément être fautive, puisqu'on peut former *ad libitum* des expressions qui jouissent de cette propriété et qui ne satisfont pas à l'équation différentielle.

Vous m'obligerez beaucoup, Monsieur, si vous voulez avoir la bonté de faire parvenir à MM. Poisson, Fourier et Cauchy les exemplaires de mon Ouvrage, qui se trouvent auprès de celui dont je vous fais hommage. Comme je resterai encore quelque temps à Potsdam, je vous prie d'y adresser une réponse, que j'attends avec une vive impatience.

Votre entièrement dévoué,

C.-G.-J. Jacobi.

Legendre à Jacobi.

Paris, le 4 juin 1829.

Monsieur,

Je suis fort empressé de recevoir l'exemplaire que vous m'avez destiné de votre Ouvrage, contenant le fondement de vos recherches sur la théorie des fonctions elliptiques. Je distribuerai conformément à vos intentions les trois exemplaires qui y sont joints, aussitôt que je les aurai reçus; je regrette seulement que vous n'en ayez pas envoyé un quatrième pour l'Académie avec une lettre au Président, et je vous engage à réparer cette omission aussitôt la présente reçue, que je m'empresse à cet effet de vous adresser à

Potsdam, puisque vous me marquez que vous y resterez encore quelque temps. — Je ne serai pas moins empressé de voir le Mémoire qui doit paraître dans le Recueil de M. Crelle, et qui sera suivi de plusieurs autres où vous donnerez, dites-vous, les démonstrations détaillées de plusieurs de vos beaux résultats. —Je vous ai adressé mon second Supplément à Königsberg, pensant que vous ne resteriez pas si longtemps à Potsdam. — Je vois à l'avance que nous serons d'accord sur les deux classes des fonctions de troisième espèce que je distingue par les noms de *logarithmique* et de *circulaire;* je suis fâché de perdre l'espérance de réduire en Table les fonctions à paramètre circulaire, et j'ai peine à comprendre comment il peut y avoir une différence aussi essentielle entre les deux classes; *mais, comme vous dites, cela tient à la nature des choses, et nous ne pouvons rien y changer.* Vous vous en consolez plus aisément que moi, vous et M. Abel qui êtes tous deux éminemment spéculatifs, mais moi qui ai toujours eu pour but d'introduire dans le calcul de nouveaux éléments qu'on puisse réaliser en nombres à volonté, moi qui me suis livré à un travail des plus longs et des plus fastidieux pour la construction des Tables, travail que je n'hésite pas à croire aussi considérable que celui des grandes Tables de Briggs, je ne prends pas mon parti aussi facilement sur l'espérance déçue que vous m'aviez fait concevoir, et dont une moitié seulement s'est réalisée.

Votre construction géométrique des fonctions multiples me paraît fort ingénieuse ; ce sont de ces choses dont je ne manquerai pas de faire mention dans un troisième Supplément, s'il y a lieu ; car je ne réponds de rien : j'ai eu encore bien de la peine à passer cet hiver, et une année de plus devient pour moi un demi-siècle. Vous avez déjà une preuve de l'influence de l'âge qui diminue nécessairement l'étendue de nos facultés intellectuelles, puisque vous avez remarqué que je n'ai pas bien saisi votre pensée, et que j'ai présenté d'une manière incomplète dans mon premier Supplément la démonstration de votre théorème I. Vous aurez peut-être occasion de faire de semblables remarques dans la lecture du second Supplément, mais vous remarquerez du moins en même temps que les erreurs dans lesquelles j'aurais pu tomber ne peuvent être reprochées qu'à moi, et que je n'ai rien négligé pour que la gloire de vos découvertes vous soit réservée tout entière.

Relativement au premier objet, je dois dire, pour mon excuse, que votre démonstration, telle que vous l'avez donnée dans le *Journal de M. Schumacher,* ne m'a paru concluante qu'en admettant comme *assomption* ce que j'appelle *le principe de la double substitution*, dont l'idée m'a paru très-heureuse et de nature à faire beaucoup d'honneur à votre sagacité.

J'ai dit expressément que la double substitution qui satisfait à l'équation différentielle doit satisfaire aussi à son intégrale, et, partant de là, je suis arrivé à votre résultat. Cette raison m'a paru suffisante; d'ailleurs je n'ai point vu que vous ayez motivé sur des raisons plus solides l'usage que vous avez fait de ce principe. Il ne m'avait pas cependant échappé qu'on pouvait faire des objections contre ce principe; j'avais remarqué que, si la valeur $y = \frac{x}{\mu}\frac{U}{V}$ satisfait au principe, une valeur différente, telle que

$$y = \frac{x}{\mu}\frac{U}{V}\left(\frac{1}{\varkappa x} + x\right)\left(\frac{1}{\varkappa x} - x\right),$$

y satisfait encore sans satisfaire à l'équation différentielle; j'avais remarqué encore que, pour l'échelle ancienne, dont l'indice est 2 (pag. 36 et 38 du premier Supplément), l'équation des amplitudes pour le théorème I, savoir $y = \frac{(1+\varkappa')x\sqrt{(1-x^2)}}{\sqrt{(1-\varkappa^2x^2)}}$, satisfait bien au principe de la double substitution, mais que l'équation analogue du théorème II, savoir $z = \frac{1+\lambda}{\lambda y + \frac{1}{y}}$, n'y satisfait pas. J'ai maintenant l'espoir que, dans le Mémoire qui va bientôt me parvenir dans le *Journal de M. Crelle,* je trouverai les développements nécessaires sur cet objet avec lesquels je pourrai corriger dans mon prochain Supplément ce que le premier contient de défectueux.

Recevez, Monsieur, mes compliments et l'assurance de mon sincère attachement.

Legendre.

En fermant cette lettre, je viens d'apprendre, avec une profonde douleur, que votre digne émule, M. Abel, est mort à Christiania, des suites d'une maladie de poitrine, dont il était affecté depuis quelque temps, et qui a été aggravée par les rigueurs de l'hiver.

C'est une perte qui sera vivement sentie de tous ceux qui s'intéressent aux progrès de l'Analyse mathématique, considérée dans ce qu'elle a de plus élevé. Au reste, dans le court espace de temps qu'il a vécu, il a élevé un monument qui suffira pour rendre sa mémoire durable et donner une idée de ce qu'on aurait pu attendre de son génie, *ni fata obstetissent.*

(*A suivre.*)