BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur la composition des forces en statique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 9 (1875), p. 281-288

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1875__9__281_1>

MÉLANGES.

SUR LA COMPOSITION DES FORCES EN STATIQUE;

Par M. G. DARBOUX.

Dans un Mémoire de 1726, qui fait partie du tome I des *Commentaires de Saint-Pétersbourg,* Daniel Bernoulli examine la démonstration par laquelle Newton et Varignon ont déduit la loi de la composition des forces de celle des mouvements qu'elles produisent. Il critique cette démonstration et lui reproche, en particulier, de s'appuyer sur des vérités contingentes, c'est-à-dire empruntées à l'expérience : « *Nihil in illa demonstratione,* dit-il, *ut falsum rejicio, sed quædam ut obscura, quædam ut non necessario vera* ». Et, après un examen détaillé des objections qu'on peut faire, suivant lui, à la marche suivie par Newton, il passe à son objet principal, qui est de donner une démonstration *géométrique* de la composition des forces.

Sans donner une analyse complète des remarques de Bernoulli, on peut cependant observer que sa démonstration n'est pas aussi géométrique qu'il le suppose. Comme celle de Newton, elle repose sur des principes empruntés à l'expérience et particulièrement sur la notion même de résultante. Il est vrai qu'elle n'emploie pas la composition des mouvements; mais, en revanche, elle ne peut pas être étendue, sans explication nouvelle, au cas où les forces agissent sur un point en mouvement ([1]).

Quoi qu'il en soit, la marche suivie par D. Bernoulli a eu de nombreux imitateurs. La Statique est souvent enseignée seule ou indépendamment de la Dynamique, et elle repose tout entière sur la loi de la composition des forces. Il était donc naturel de rechercher une démonstration de cette loi, uniquement déduite de la considération de l'équilibre, et c'est ce que n'ont pas manqué de faire de nombreux géomètres.

Pour tout ce qui concerne la comparaison de la méthode de Bernoulli avec celle de Newton, ainsi que les démonstrations analogues à celles de Bernoulli parues avant la *Mécanique analytique*, on pourra lire la Notice sur la loi du parallélogramme placée au commencement de la *Mécanique analytique*. Parmi les divers écrits cités par Lagrange, nous signalerons surtout le Mémoire de d'Alembert, dans le tome I des *Opuscules mathématiques*, où la démonstration, un peu longue, de Bernoulli se trouve ramenée au dernier degré de simplicité.

Il est aujourd'hui peu de Recueils scientifiques où l'on ne rencontre au moins une démonstration de la règle du parallélogramme. Le premier Chapitre de la *Mécanique céleste* en contient une qui repose sur l'emploi des infiniment petits. Poisson, dans sa *Mécanique rationnelle* en donne une autre qui conduit à une équation fonctionnelle. On trouve encore, dans la dernière édition de la *Sta-*

([1]) En supposant, en effet, la résultante trouvée en Statique, voici comment on peut raisonner dans le cas où le point est en mouvement : Étant données deux forces P, Q agissant sur un point materiel A, introduisons deux forces — P, — Q et la force R qui leur ferait equilibre. L'état, c'est-à-dire le mouvement du point, ne sera pas change Supprimons les groupes P — P, Q — Q; il reste la force R, qui peut, par conséquent, remplacer les forces P, Q. Mais ce principe, qu'on peut ajouter ou supprimer sur un point materiel en mouvement des forces qui se feraient equilibre sur le point au repos, n'est au fond qu'un cas particulier de la loi de la composition des mouvements produits par les forces.

tique de Monge, une démonstration due à Cauchy et reproduite dans le tome I des *Exercices de Mathématiques*, 1826. Möbius en fait connaître une autre, fort curieuse, dans sa *Statique*. Celle que contiennent nos Traités de Mécanique est très-simple, mais elle repose sur un principe de la statique du corps solide; on l'attribue, je crois, à Ampère. Enfin, pour borner là notre énumération, citons encore, dans le *Journal de Liouville*, t. I, la démonstration de M. Aimé, qui se rapproche de celle de D. Bernoulli et n'offre aucun avantage sur celle-ci, telle qu'elle a été présentée par d'Alembert.

Ces différentes démonstrations reposent sur des principes qui leur sont communs, et sur d'autres qui sont propres à chacune d'elles. C'est ainsi que les unes admettent que la direction et la grandeur de la résultante varient d'une manière continue avec la grandeur et la direction des composantes; d'autres supposent seulement que la résultante est dirigée à l'intérieur de l'angle formé par les composantes, etc.

Je me suis proposé de reprendre l'étude de cette question en la traitant comme un problème de pure Géométrie, ce qu'elle est au fond, et en tâchant de conduire la démonstration de manière à bien mettre en évidence quelles sont les hypothèses qu'on peut rejeter et celles qu'il est nécessaire d'admettre. Je commencerai donc en admettant les hypothèses communes à toutes les démonstrations et en me proposant le problème de Géométrie suivant :

Étant données n lignes OA_1, OA_2, ..., OA_n, ayant leur origine en un point O, déterminer pour ces lignes une loi de composition d'après les conditions suivantes :

I. La résultante totale, unique et déterminée, demeurera invariable quand, à quelques-unes de ces lignes, on substituera leur résultante partielle. Elle sera indépendante de l'ordre dans lequel auront été faites les compositions partielles.

II. Elle sera aussi indépendante de l'orientation du système dans l'espace, c'est-à-dire qu'elle se déplacera en formant avec les lignes un système invariable quand on leur imprimera un déplacement quelconque autour du point O.

Dans cette manière de poser la question, il est nécessaire de bien prouver les points qui paraîtraient le plus évidents s'il s'agissait réellement de forces; la conclusion aura d'autant plus de valeur qu'on aura moins admis de conditions pour l'obtenir.

Il résulte d'abord des deux hypothèses admises que la résultante OC de deux lignes égales et directement opposées est nulle. En effet, le système des lignes OA, OB ne change pas : 1° par une rotation autour de AOB d'un angle quelconque; 2° par une rotation de 180 degrés autour d'un axe Ox perpendiculaire à AOB, qui amène OA sur OB et OB sur OA. Ces rotations ne devraient donc pas changer la direction de la résultante, ce qui est impossible. Il faut donc qu'elle soit nulle.

Réciproquement la résultante de deux lignes OA, OB n'est nulle que si elles sont égales et directement opposées. Supposons, en effet, que deux lignes OA, OB aient une résultante nulle. Considérons le système des trois lignes OA, OB et OB′ égale et directement opposée à OB. La résultante de ces trois lignes est OA; mais, comme la résultante de OA et de OB est nulle, elle est aussi OB′. Comme, d'après la condition I, il ne peut y avoir deux résultantes différentes, il faut que OB′ soit égale et parallèle à OA et de même sens qu'elle, c'est-à-dire qu'il faut que OA, OB soient égales et de sens opposés.

En second lieu, la résultante de deux lignes OA, OB est nécessairement dirigée dans leur plan, car soit OC cette résultante : deux lignes OA′, OB′ égales et opposées à OA, OB doivent avoir pour résultante OC′ égale et opposée à OC. En effet, la résultante de OA, OB, OA′, OB′ est nulle; il faut donc qu'il en soit de même de la résultante de OC et de OC′ et, par conséquent, que OC et OC′ soient égales et opposées.

Or, si l'on fait tourner OA, OB de 180 degrés dans leur plan, elles viennent s'appliquer sur OA′, OB′; il faut donc que OC vienne s'appliquer sur son prolongement OC′, ce qui exige que OC soit dans le plan BOA. Ainsi :

La résultante de deux lignes est contenue dans le plan de ces deux lignes.

Ce point étant admis, soient P, Q deux lignes appliquées au point O; adjoignons-leur une troisième ligne quelconque R non située dans leur plan et cherchons la résultante S de ces trois lignes. Soient R′ la résultante de P et Q, Q′ celle de P et R, P′ celle de Q et de R. On aura S en composant soit P et P′, soit Q et Q′, soit R et R′. D'où il suit que les plans de P et P′, de Q et Q′, de R et R′ doivent se couper suivant une même droite. On aura donc, d'après un théorème connu relatif à l'angle trièdre,

$$\frac{\sin R'OP}{\sin R'OQ}\,\frac{\sin P'OQ}{\sin P'OR}\,\frac{\sin Q'OR}{\sin Q'OP}=-1,$$

$$\frac{\sin R'OP}{\sin QOR'}=\frac{\sin P'OR}{\sin P'OQ}:\frac{\sin Q'OR}{\sin Q'OP}.$$

Supposons OR perpendiculaire au plan POQ. Le rapport $\frac{\sin P'OR}{\sin P'OQ}$ ne dépend que des forces R et Q et de leur angle qui est supposé droit. Il est donc une fonction de R et de Q, $\varphi(R, Q)$. De même le rapport semblable $\frac{\sin Q'OR}{\sin Q'OP}$ est la même fonction de R et de P. On a donc

$$\frac{\sin R'OP}{\sin QOR'}=\frac{\varphi(R,Q)}{\varphi(R,P)},$$

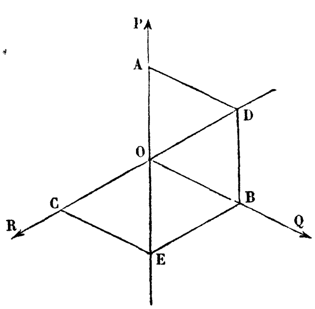
ou, en donnant à R une valeur numérique 1, par exemple,

$$\frac{\sin R'OP}{\sin QOR'}=\frac{\varphi(Q)}{\varphi(P)}.$$

Cette équation exprime que, si l'on porte la longueur $\varphi(P)$ sur P dans le sens de P ou en sens contraire, suivant que $\varphi(P)$ est positif ou négatif, et de même $\varphi(Q)$ sur Q, la résultante est *en direction* la diagonale du parallélogramme construit sur $\varphi(P)$ et $\varphi(Q)$.

J'ajoute que la diagonale sera, en grandeur, égale à la fonction $\varphi(R')$ de la résultante R'.

Soient, en effet, P, Q, R trois lignes dont la résultante soit nulle.



Chacune sera égale et opposée à la résultante des deux autres.

Prenons

$$OA = \varphi(P), \quad OB = \varphi(Q), \quad OC = \varphi(R);$$

OP sera, en direction, la diagonale du parallélogramme construit sur OB, OC; OR la diagonale du parallélogramme construit sur OA, OB. On a donc

$$OD = BE = OC, \quad \text{ou} \quad OD = \varphi(R).$$

Comme R est la grandeur de la résultante des deux lignes P, Q, on voit que la diagonale du parallélogramme construit sur $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$ a pour grandeur $\varphi(R)$, comme nous l'avions annoncé. De tout ce qui précède résulte la loi de composition suivante :

Étant données n lignes $P_1, P_2, \ldots, P_n$, la loi de composition la plus générale satisfaisant aux conditions I, II sera la suivante. On choisira une fonction $\varphi(x)$ et l'on portera des longueurs égales à $\varphi(P_1)$, $\varphi(P_2), \ldots, \varphi(P_n)$ respectivement sur $P_1, P_2, \ldots, P_n$, dans un sens déterminé par le signe de chacune de ces fonctions. On composera toutes ces lignes d'après les règles du polygone des forces, c'est-à-dire en les portant successivement les unes à la suite des autres; le côté qui fermera ce polygone donnera la direction de la résultante R, et il sera égal en grandeur à $\varphi(R)$.

Ajoutons que, pour que R soit bien connu, il faut qu'on puisse le déduire sans ambiguïté de la valeur de $\varphi(R)$. Remarquons aussi que la loi de composition ne sera pas changée si, à la place de $\varphi(x)$, on prend $m\varphi(x)$, m étant un nombre quelconque.

Les deux conditions I, II ne suffisent donc pas à nous conduire seules aux lois de la composition des forces. Nous ajouterons l'hypothèse suivante, qui est admise dans toutes les démonstrations de la loi du parallélogramme et sur laquelle repose la définition même de la grandeur d'une force.

III. La loi de la composition des lignes doit se réduire à celle de l'addition algébrique pour des lignes de même direction.

Voyons les conséquences de cette hypothèse sur la forme de la fonction $\varphi(P)$.

Considérons deux lignes quelconques P, Q, de même direction et de même sens, et d'autres lignes quelconques S, T,.... Dans le polygone des lignes résultant de la composition figurent deux côtés parallèles, $\varphi(P)$ et $\varphi(Q)$. Mais, si l'on compose P, Q en une autre ligne P + Q, les deux côtés $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$ seront remplacés par un seul $\varphi(P+Q)$, qui leur sera parallèle. Comme la résultante totale ne doit pas être changée, il faut que l'on ait

$$\varphi(P+Q) = \varphi(P) + \varphi(Q).$$

Ainsi cette équation fonctionnelle est la traduction de notre nouvelle condition III.

On sait résoudre l'équation précédente en supposant $\varphi(P)$ continue. La fonction qu'on obtient alors est

$$\varphi(P) = aP.$$

Mais nous allons montrer que, en supposant $\varphi(P)$ simplement positif, on arrive au même résultat.

En effet, de l'équation

$$\varphi(P+Q) - \varphi(P) = \varphi(Q)$$

on déduit que la fonction $\varphi(x)$, si elle est positive, est toujours croissante. D'ailleurs c'est une conséquence bien connue de l'équation fonctionnelle, que l'on a

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}\varphi(1),$$

c'est-à-dire $\varphi(x) = ax$, pour toutes les valeurs commensurables de x.

La fonction étant croissante, la même formule conviendra aussi évidemment, sans qu'il soit nécessaire de la supposer continue, pour les valeurs incommensurables de x (1).

D'après une remarque faite plus haut, on peut diviser par a et prendre $\varphi(x) = x$, ce qui conduit à la loi du parallélogramme.

Ainsi, pour obtenir cette loi, il faut ajouter aux trois hypothèses déjà faites l'une des deux suivantes :

IV. $\varphi(P)$ est toujours positif, c'est-à-dire $\varphi(P)$ et $\varphi(Q)$ sont de même signe.

---

(1) Car, soit x une incommensurable comprise entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{p+1}{q}$, on aura

$$\varphi\left(\frac{p}{q}\right) < \varphi(x) < \varphi\left(\frac{p+1}{q}\right), \quad \text{ou} \quad a\frac{p}{q} < \varphi(x) < a\left(\frac{p+1}{q}\right);$$

$\varphi(x)$ sera donc comprise entre deux grandeurs ayant pour limite ax.

IV_a. $\varphi(P)$ est une fonction continue.

Examinons la signification mécanique de ces deux hypothès

IV. Si $\varphi(P)$ est toujours de même signe, la résultante des forces P, Q sera toujours dirigée dans leur angle.

IV_a. Si $\varphi(P)$ est continue, la direction de la résultante grandeur seront des fonctions continues des deux forces.

Ainsi il faut admettre l'une ou l'autre des deux hypothes précèdent pour obtenir la loi connue de la composition des f

Aucune démonstration n'échappe aux conditions que avons posées ici. Celle de Bernoulli modifiée par d'Ale paraît encore la meilleure au point de vue du moindre nomb hypothèses faites, et aussi parce qu'elle n'emploie que des con tions planes. Il nous semble que, en écartant des distinctions fait déplacées dans un enseignement, on pourrait tirer des qui précèdent un moyen assez simple d'obtenir en Statique de la composition des forces.