MAURICE LEVY

Note sur les équations générales de la théorie mathématique de l'élasticité en coordonnées curvilignes

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 6 (1874), p. 214-224

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1874__6__214_1>

MÉLANGES.

NOTE SUR LES ÉQUATIONS GÉNÉRALES DE LA THÉORIE MATHÉMATIQUE DE L'ÉLASTICITÉ EN COORDONNÉES CURVILIGNES;

PAR M. MAURICE LEVY.

Dans un des derniers cahiers du *Journal de Crelle* (Berlin, 1873), M. Borchardt, en faisant usage du potentiel des forces élastiques, de quelques-unes des considérations récemment développées par M. Lipschitz, sur les fonctions homogènes de *n différentielles,* et enfin d'un théorème bien connu, sur l'intégration multiple, établi par Jacobi dans sa *Theoria novi multiplicatoris*, a donné une nouvelle démonstration des équations remarquables par lesquelles Lamé exprime, en coordonnées curvilignes générales, les déplacements élastiques dans les milieux isotropes.

On sait que, si l'on rapporte les divers points d'un milieu élastique quelconque à des axes rectangulaires, les projections u, v, w, sur ces axes, du déplacement supposé infiniment petit d'un point M du milieu satisfont à trois équations linéaires à différences partielles du second ordre : ceci a lieu, que le milieu soit ou non isotrope; mais, dans le cas particulier des milieux isotropes, il se présente un fait remarquable. Si, aux trois fonctions u, v, w on adjoint quatre fonctions auxiliaires, à savoir : la dilatation cubique au point M et les rotations moyennes autour d'axes parallèles aux axes de coordonnées menés par ce point, ce qui porte à sept le nombre des fonctions à déterminer, ces sept fonctions satisfont à sept équations à différences partielles du premier ordre.

Ce que Lamé a montré, c'est que ces sept équations se maintiennent dans ce qu'elles ont d'essentiel, lorsque les déplacements élastiques, au lieu d'être rapportés à des coordonnées rectilignes, le sont à des coordonnées curvilignes orthogonales quelconques, et c'est ce résultat que M. Borchardt a de nouveau mis en lumière.

Les calculs du géomètre allemand, bien que n'étant peut-être pas au fond plus courts que ceux de Lamé, sont en eux-mêmes très-intéressants, et par leur élégance, et parce qu'ils font bien ressortir les circonstances analytiques qui expliquent le résultat dû à Lamé; mais, en y regardant de près, on reconnaît que ce résultat est, en réalité, purement géométrique, et que les équations de Lamé ne sont pas autre chose que l'expression analytique d'un théorème très-élémentaire de *Géométrie pure*, établi en 1842 par Cauchy, sur ces quantités que l'illustre géomètre a introduites dans la Science sous le nom de *rotations moyennes*. En partant de ce théorème, il se trouve qu'on peut écrire les équations de Lamé presque sans calcul, et, comme elles sont fondamentales dans la théorie mathématique de l'élasticité, il nous a paru qu'il y aurait peut-être quelque utilité à les présenter de cette manière.

Il y a plus, les équations dont il s'agit ne sont pas applicables aux *surfaces élastiques*, ou du moins ne le sont que quand ces surfaces sont rapportées à leurs lignes de courbure, en sorte qu'elles ne permettraient pas d'étudier l'équilibre et le mouvement d'une surface élastique dont le *bord* ou contour soumis à des conditions données ne serait pas une ligne de courbure.

La marche que nous suivons (analogue, du reste, à celle qui, dans une question tout autre, a été employée par M. Bonnet pour la démonstration des formules de M. Codazzi) permet facilement de combler cette lacune.

I.

Soient x, y, z les coordonnées rectangulaires d'un point M d'un milieu élastique continu, isotrope ou non; u, v, w les projections de son déplacement sur les axes des coordonnées, et U, V, W les rotations moyennes autour de parallèles à ces axes issues du point M : u, v, w; U, V, W sont six fonctions de x, y, z dont les trois dernières sont définies par les équations

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right),\\ V &= \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right),\\ W &= \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right).\end{aligned}\right.$$

Soient maintenant ρ, ρ_1, ρ_2 les coordonnées curvilignes du point M. Appelons s la ligne d'intersection des surfaces ρ_1 et ρ_2; s_1 la ligne d'intersection des surfaces ρ_2 et ρ; s_2 la ligne d'intersection des surfaces ρ et ρ_1; et appelons, avec Lamé, $\frac{1}{r_i^{(j)}}$ la courbure de la surface ρ_i suivant la ligne de courbure s_j [1].

Les surfaces coordonnées étant ainsi définies, soient R, R_1, R_2 les projections du déplacement élastique du point M sur les normales à ces surfaces en M, et $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ les rotations moyennes autour de

---

[1] Nous prendrons, suivant l'usage, pour sens positif de la normale à une surface ρ_i, le côté de cette surface où le paramètre ρ_i croît, et pour sens négatif celui où il décroît; puis nous attribuerons à chaque courbure $\frac{1}{r_i^{(j)}}$ le signe + ou le signe —, suivant que le centre de cette courbure tombe sur la partie positive ou sur la partie négative de la normale à la surface ρ_i.

ces mêmes normales : R, R_1, R_2; $\mathfrak{R}, \mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ sont six fonctions des coordonnées ρ, ρ_1, ρ_2.

Supposons qu'on prenne pour axes des coordonnées x, y, z les normales aux surfaces ρ, ρ_1, ρ_2 passant au point M.

Alors, pour le point particulier M, origine des coordonnées, on aura

$$(3) \qquad \begin{cases} u = R, & v = R_1, & w = R_2, \\ U = \mathfrak{R}, & V = \mathfrak{R}_1, & W = \mathfrak{R}_2. \end{cases}$$

Soit maintenant M′ un point pris sur la ligne s à une distance infiniment petite $ds = \frac{d\rho}{h}$ de M. En négligeant les infiniment petits du second ordre, les coordonnées rectilignes du point M seront

$$(4) \qquad dx = ds = \frac{d\rho}{h}, \quad dy = dz = 0.$$

Soient $M'x'$, $M'y'$, $M'z'$ les normales aux surfaces ρ_i au point M′. Les projections du déplacement de ce point sur ces normales sont

$$R + \frac{dR}{d\rho}\,d\rho, \quad R_1 + \frac{dR_1}{d\rho}\,d\rho, \quad R_2 + \frac{dR_2}{d\rho}\,d\rho,$$

et si a, a', a''; b, b', b''; c, c', c'' désignent les cosinus des angles que les lignes $M'x'$, $M'y'$, $M'z'$ font respectivement avec les axes des coordonnées Mx, My, Mz, les projections du déplacement de M′ sur ces axes seront

$$(5) \qquad \begin{cases} \left(R + \frac{dR}{d\rho}\,d\rho\right) a + \left(R_1 + \frac{dR_1}{d\rho}\,d\rho\right) b + \left(R_2 + \frac{dR_2}{d\rho}\,d\rho\right) c, \\ \left(R + \frac{dR}{d\rho}\,d\rho\right) a' + \left(R_1 + \frac{dR_1}{d\rho}\,d\rho\right) b' + \left(R_2 + \frac{dR_2}{d\rho}\,d\rho\right) c', \\ \left(R + \frac{dR}{d\rho}\,d\rho\right) a'' + \left(R_1 + \frac{dR_1}{d\rho}\,d\rho\right) b'' + \left(R_2 + \frac{dR_2}{d\rho}\,d\rho\right) c''. \end{cases}$$

Entre les neuf cosinus qui entrent dans ces expressions, il existe les six relations d'orthogonalité qui, en négligeant les infiniment petits du second ordre, peuvent s'écrire simplement

$$a = b' = c'' = 1, \quad b + a' = 0, \quad c + a'' = 0, \quad c' + b'' = 0.$$

Mais, puisque la ligne s est une ligne de courbure de la surface ρ, on a

$$c' = 0,$$

et, par suite,

$$b'' = 0.$$

De plus, par la définition même des courbures et de leurs signes,

$$a'' = \frac{ds}{r_1} = \frac{d\rho}{hr_1}, \quad \text{d'où} \quad b = -\frac{ds}{r_1} = -\frac{d\rho}{hr_1},$$
$$a' = \frac{ds}{r_2} = \frac{d\rho}{hr_2}, \quad \text{d'où} \quad c = -\frac{ds}{r_2} = -\frac{d\rho}{hr_2}.$$

Par suite, les expressions ci-dessus des projections du déplacement de M′ sur les axes de coordonnées deviennent, en négligeant les infiniment petits du second ordre :

$$(5\ bis)\qquad \left\{ \begin{aligned} & \mathrm{R} + \left(\frac{d\mathrm{R}}{d\rho} - \frac{\mathrm{R}_1}{hr_1} - \frac{\mathrm{R}_2}{hr_2}\right) d\rho, \\ & \mathrm{R}_1 + \left(\frac{d\mathrm{R}_1}{d\rho} + \frac{\mathrm{R}}{hr_1}\right) d\rho, \\ & \mathrm{R}_2 + \left(\frac{d\mathrm{R}_2}{d\rho} + \frac{\mathrm{R}}{hr_2}\right) d\rho. \end{aligned} \right.$$

Les mêmes projections peuvent être représentées par

$$u + \frac{du}{dx} ds = \mathrm{R} + \frac{du}{dx}\frac{d\rho}{h},$$
$$v + \frac{dv}{dx} ds = \mathrm{R}_1 + \frac{dv}{dx}\frac{d\rho}{h},$$
$$w + \frac{dw}{dx} ds = \mathrm{R}_2 + \frac{dw}{dx}\frac{d\rho}{h};$$

d'où

$$(6)\qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= h\frac{d\mathrm{R}}{d\rho} - \frac{\mathrm{R}_1}{r_1} - \frac{\mathrm{R}_2}{r_2}, \\ \frac{dv}{dx} &= h\frac{d\mathrm{R}_1}{d\rho} + \frac{\mathrm{R}}{r_1}, \\ \frac{dw}{dx} &= h\frac{d\mathrm{R}_2}{d\rho} + \frac{\mathrm{R}}{r_2}, \end{aligned} \right.$$

ou, en se rappelant la formule très-simple, et dont la démonstration géométrique est immédiate [1],

$$\text{(A)} \qquad \frac{1}{r_i^{(j)}} = \frac{h_i}{h_j}\frac{dh_j}{d\rho_i},$$

$$(7) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= h\frac{dR}{d\rho} - \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}R_1 - \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}R_2, \\ \frac{dv}{dx} &= h\frac{dR_1}{d\rho} + \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}R, \\ \frac{dw}{dx} &= h\frac{dR_2}{d\rho} + \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}R. \end{aligned} \right.$$

En prenant le point M′ successivement sur les lignes s_1 et s_2, on trouverait de même les expressions des dérivées partielles de u, v, w, relativement à y et à z. Mais, au lieu des neuf dérivées partielles de u, v, w, il est plus utile de chercher les neuf quantités suivantes, qui ont des significations géométriques :

1° Les trois dilatations linéaires suivant les normales Mx, My, Mz aux trois surfaces coordonnées. La première est fournie par la première équation (7) ; les autres s'en déduisent par permutations tournantes :

$$(8) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= h\frac{dR}{d\rho} - \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}R_1 - \frac{h_2}{h}\frac{dh}{d\rho_2}R_2, \\ \frac{dv}{dy} &= h_1\frac{dR_1}{d\rho_1} - \frac{h_2}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho_2}R_2 - \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho}R, \\ \frac{dw}{dz} &= h_2\frac{dR_2}{d\rho_2} - \frac{h}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho}R - \frac{h_1}{h_2}\frac{dh_2}{d\rho_1}R_1, \end{aligned} \right.$$

d'où, pour la dilatation cubique θ ou $\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$,

$$(9) \qquad \theta = hh_1h_2\left(\frac{d\frac{R}{h_1h_2}}{d\rho} + \frac{d\frac{R_1}{h_2h}}{d\rho_1} + \frac{d\frac{R_2}{hh_1}}{d\rho_2} \right).$$

2° Les trois quantités $\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}$, $\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz}$, $\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}$ que M. de Saint-Venant a appelées les *glissements transversaux*. La seconde équation (7)

$$(a) \qquad \frac{dv}{dx} = h\frac{dR_1}{d\rho} + \frac{h_1}{h}\frac{dh}{d\rho_1}R$$

---

[1] *Leçons sur les coordonnées curvilignes*, § 28.

donne, par symétrie,

$$(b)\qquad \frac{du}{dy} = h_1 \frac{dR}{d\rho_1} + \frac{h}{h_1}\frac{dh_1}{d\rho} R_1,$$

et, en additionnant (a) et (b), on a la dernière des équations suivantes, les deux autres s'en déduisant par permutations :

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} &= \frac{h_2}{h_1}\frac{dR_1 h_1}{d\rho_2} + \frac{h_1}{h_2}\frac{dR_2 h_2}{d\rho_1},\\
\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} &= \frac{h}{h_2}\frac{dR_2 h_2}{d\rho} + \frac{h_2}{h}\frac{dRh}{d\rho_2},\\
\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} &= \frac{h_1}{h}\frac{dRh}{d\rho_1} + \frac{h}{h_1}\frac{dR_1 h_1}{d\rho}.
\end{aligned}\right.$$

Enfin, en prenant la demi-différence des expressions (a) et (b), on trouve, pour les rotations moyennes, la dernière des équations suivantes, les deux autres s'en déduisant toujours par permutations,

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right) &= U = \mathfrak{R} = \frac{h_1 h_2}{2}\left(\frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho_2} - \frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho_1}\right),\\
\frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) &= V = \mathfrak{R}_1 = \frac{h_2 h}{2}\left(\frac{d\frac{R_2}{h_2}}{d\rho} - \frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_2}\right),\\
\frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right) &= W = \mathfrak{R}_2 = \frac{hh_1}{2}\left(\frac{d\frac{R}{h}}{d\rho_1} - \frac{d\frac{R_1}{h_1}}{d\rho}\right).
\end{aligned}\right.$$

II.

Remarquons que ce qui précède nous permet déjà d'écrire en coordonnées curvilignes les expressions des forces élastiques agissant sur les trois éléments plans tangents aux surfaces ρ_i qui se croisent au point M d'un corps élastique isotrope; car si A, A_1, A_2 sont les pressions normales à ces éléments, et T, T_1, T_2 les pressions tangentielles, on a

$$A = \lambda\theta + 2\mu\frac{du}{dx},\qquad A_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dv}{dy},\qquad A_2 = \lambda\theta + 2\mu\frac{dw}{dz};$$

$$T = \mu\left(\frac{dw}{dy} + \frac{dv}{dz}\right),\quad T_1 = \mu\left(\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}\right),\quad T_2 = \mu\left(\frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy}\right),$$

λ et μ étant deux constantes dépendant de la nature de la matière isotrope.

En remplaçant les seconds membres de ces expressions par les valeurs (8), (9) et (10), on aura les forces élastiques A_i et T_i en fonction des déplacements R_i; par suite, on aura, au moyen des mêmes déplacements, les pressions sur un élément plan quelconque; et cette méthode pourrait être facilement étendue aux corps hétérotropes, s'il y avait quelque intérêt à faire cette extension.

III.

Cherchons maintenant les dérivées partielles des fonctions U, V, W, comme nous avons cherché celles de u, v, w. Au premier abord, ce problème semble beaucoup plus difficile, parce que les dérivées de U, V, W dépendent des dérivées du second ordre R, R_1, R_2; mais nous allons montrer que le théorème de Cauchy, auquel nous avons fait allusion en commençant, lève la difficulté, et permet d'écrire le résultat cherché, sans aucun calcul nouveau. Ce théorème peut être énoncé ainsi :

Si l'on déforme infiniment peu un milieu continu, élastique ou non, et que sur chacune des droites issues d'un de ses points M *on porte une longueur égale ou proportionnelle à la rotation moyenne autour de cette droite, le lieu des extrémités des longueurs ainsi obtenues est une sphère passant par le point* M.

De là résulte : 1° que le diamètre de la sphère, passant par le point M, est, de toutes les droites issues de ce point, celle pour laquelle la rotation moyenne est maximum; cette rotation est ce que Cauchy nomme la *rotation principale;* 2° que la rotation moyenne autour de toute autre droite issue de M est représentée par la projection sur cette droite de la rotation principale.

Ainsi les rotations moyennes U, V, W se projettent et, par suite, se composent entre elles absolument comme les déplacements u, v, w (1). Or, pour établir les équations (5), et par suite, toutes celles

---

(1) On peut démontrer le théorème de Cauchy d'une façon très-élémentaire. Soient x, y, z; x', y', z' deux systèmes d'axes rectangulaires. Soient m, n, p; m_1, n_1, p_1; m_2, n_2, p_2 les cosinus des angles que les x', y', z' font respectivement avec les x, y, z; enfin soient u, v, w; U, V, W les déplacements et les rotations moyennes relatifs aux premiers axes; u', v', w'; U', V', W' les quantités analogues pour le second système

qui en découlent, nous n'avons fait que des projections; nous pourrions donc répéter mot pour mot tous les raisonnements qui ont conduit à ces équations, en substituant aux lettres u, v, w, R, R_1, R_2 celles U, V, W et $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$. En particulier, nous retrouverions ainsi les analogues des équations (11), de sorte que, en rapprochant les membres extrêmes de ces équations, nous pouvons, sans nouveau calcul, écrire

$$(12)\quad \begin{cases} \dfrac{dV}{dz} - \dfrac{dW}{dy} = h_1 h_2 \left(\dfrac{d\dfrac{\mathcal{R}_1}{h_1}}{d\rho_2} - \dfrac{d\dfrac{\mathcal{R}_2}{h_2}}{d\rho_1} \right), \\ \dfrac{dW}{dx} - \dfrac{dU}{dz} = h_2 h \left(\dfrac{d\dfrac{\mathcal{R}_2}{h_2}}{d\rho} - \dfrac{d\dfrac{\mathcal{R}}{h}}{d\rho_2} \right), \\ \dfrac{dU}{dy} - \dfrac{dV}{dx} = h h_1 \left(\dfrac{d\dfrac{\mathcal{R}}{h}}{d\rho_1} - \dfrac{d\dfrac{\mathcal{R}_1}{h_1}}{d\rho} \right). \end{cases}$$

IV.

Cela posé, quelle que soit la position des axes des coordonnées x, y, z, lorsqu'il s'agit d'un milieu élastique isotrope en équilibre sous l'action de forces quelconques, les sept fonctions u, v, w, U, V, W et θ satisfont aux équations suivantes :

---

d'axes. Au moyen des formules de transformation

$$\begin{aligned} u' &= mu + nv + pw, & x &= mx' + m_1 y' + m_2 z', \\ v' &= m_1 u + n_1 v + p_1 w, & y &= nx' + n_1 y' + n_2 z', \\ w' &= m_2 u + n_2 v + p_2 w; & z &= px' + p_1 y' + p_2 z'; \end{aligned}$$

on trouve sans difficulté

$$\frac{dv'}{dz'} - \frac{dw'}{dy'} = (n_1 p_2 - p_1 n_2)\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right) + (p_1 m_2 - m_1 p_2)\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right) + (m_1 n_2 - n_1 m_2)\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right),$$

ou, à cause que $n_1 p_2 - p_1 n_2 = m$, $p_1 m_2 - m_1 p_2 = n$, $m_1 n_2 - n_1 m_2 = p$, on a la première des trois équations suivantes, les deux autres s'obtenant par symétrie,

$$\begin{aligned} U' &= m\,U + n\,V + p\,W, \\ V' &= m_1 U + n_1 V + p_1 W, \\ W' &= m_2 U + n_2 V + p_2 W. \end{aligned}$$

Ces équations établissent la proposition énoncée.

1° Pour définir la dilatation cubique,

$$\theta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}. \tag{13}$$

2° Pour définir les rotations moyennes,

$$\left\{\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}\right), \\ V &= \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}\right), \\ W &= \frac{1}{2}\left(\frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}\right). \end{aligned}\right. \tag{14}$$

3° Entre les rotations moyennes et les composantes X, Y, Z suivant les axes de coordonnées de la force accélératrice rapportée à l'unité de masse

$$\left\{\begin{aligned} \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy} &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\frac{d\theta}{dx} + \frac{\delta}{2\mu}X, \\ \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz} &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\frac{d\theta}{dy} + \frac{\delta}{2\mu}Y, \\ \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx} &= \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu}\frac{d\theta}{dz} + \frac{\delta}{2\mu}Z, \end{aligned}\right. \tag{15}$$

où λ et μ sont, comme précédemment, les deux coefficients d'élasticité relatifs à la matière considérée, et δ sa densité.

Il s'agit de montrer que les sept fonctions R, R_1, R_2, $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$ et θ des coordonnées curvilignes ρ, ρ_1, ρ_2 satisfont aussi à sept équations à différences partielles du premier ordre ; or cela est évident par ce qui précède. On aura :

1° Pour définir la *dilatation cubique* θ, l'équation (9).

2° Pour définir les rotations moyennes $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, les équations (11), en considérant les deux derniers membres de chacune d'elles.

3° Reste donc à trouver les équations équivalentes à (15). A cet effet, soient F, F_1, F_2 les projections sur les normales aux surfaces ρ_i de la force accélératrice rapportée à l'unité de masse. Les équations (15) ayant lieu, quelle que soit la position des axes de coordonnées, faisons, comme précédemment, coïncider ces axes avec les normales Mx, My, Mz aux surfaces ρ_i qui se croisent en M. Alors les premiers membres de ces équations sont égaux aux premiers membres, et par suite aux seconds membres des équations (12).

De plus

$$X = F, \quad Y = F_1 \quad Z = F_2.$$

Enfin, puisque Mx, My, Mz sont les tangentes aux lignes d'intersection des surfaces ρ_i,

$$\frac{d\theta}{dx} = h\frac{d\theta}{d\rho}, \quad \frac{d\theta}{dy} = h_1\frac{d\theta}{d\rho_1}, \quad \frac{d\theta}{dz} = h_2\frac{d\theta}{d\rho_2};$$

donc les équations (15) deviennent

$$(16)\quad \begin{cases} h_1 h_2 \left(\dfrac{d\dfrac{\mathfrak{R}_1}{h_1}}{d\rho_2} - \dfrac{d\dfrac{\mathfrak{R}_2}{h_2}}{d\rho_1} \right) = \dfrac{\lambda + 2\mu}{2\mu} h \dfrac{d\theta}{d\rho} + \dfrac{\delta}{2\mu} F, \\ h_2 h \left(\dfrac{d\dfrac{\mathfrak{R}_2}{h_2}}{d\rho} - \dfrac{d\dfrac{\mathfrak{R}}{h}}{d\rho_2} \right) = \dfrac{\lambda + 2\mu}{2\mu} h_1 \dfrac{d\theta}{d\rho_1} + \dfrac{\delta}{2\mu} F_1, \\ h h_1 \left(\dfrac{d\dfrac{\mathfrak{R}}{h}}{d\rho_1} - \dfrac{d_2\dfrac{\mathfrak{R}_1}{h_1}}{d\rho} \right) = \dfrac{\lambda + 2\mu}{2\mu} h_2 \dfrac{d\theta}{d\rho_2} + \dfrac{\delta}{2\mu} F_2, \end{cases}$$

qui, avec (9) et (10), complètent les équations cherchées.

Ces équations ne sont pas absolument identiques à celles de Lamé. Ces dernières [(25), (26), (27) des §§ CLIV et CLV des *Leçons sur les coordonnées curvilignes*] contiennent, au lieu des fonctions $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$, trois autres fonctions auxiliaires désignées par les lettres $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; mais les deux systèmes d'équations deviennent identiques, si l'on pose

$$\mathfrak{R} = \tfrac{1}{2} h \mathcal{A}, \quad \mathfrak{R}_1 = \tfrac{1}{2} h_1 \mathcal{B}, \quad \mathfrak{R}_2 = \tfrac{1}{2} h_2 \mathcal{C}.$$

Au point de vue analytique, il est évidemment indifférent d'introduire les fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, ou les fonctions $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$; mais ces dernières, outre qu'elles rendent les équations un peu plus symétriques, ont une signification géométrique que n'ont pas les premières. Elles paraissent donc préférables.

La méthode qui précède permet aussi facilement de trouver les équations d'équilibre d'une surface élastique, quelles que soient les lignes auxquelles on rapporte les points de cette surface, tandis que les équations de Lamé ne fournissent ce résultat que dans le cas particulier où les surfaces sont rapportées à leurs lignes de courbure.

Nous aurons occasion de revenir sur ce point.

Le gérant responsable : GAUTHIER-VILLARS.