

BULLETIN DES SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 4
(1873), p. 40-60

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1873__4__40_0>

© Gauthier-Villars, 1873, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. GERONO et BOURGET.

T. X, 2^e série, 1871 (1).

VAZEILLE (E.). — *Cordes principales et plans principaux d'une surface du second ordre.* (13 p.)

L'auteur donne les différentes méthodes de discussion de l'équation du 3^e degré dont dépendent les plans principaux dans les surfaces du second ordre. Il expose, en particulier, la méthode de Jacobi, dans laquelle on commence par mettre l'équation en S sous la forme

$$\frac{K^2}{S-a} + \frac{K'^2}{S-b} + \frac{K''^2}{S-c} + H = 0.$$

Cette méthode est, comme on sait, l'une des plus simples et des plus nettes; mais elle est peut-être la seule de toutes qui ne puisse pas s'étendre au cas où il y a plus de trois variables. Aussi pensons-nous qu'il y aurait quelque avantage à la rattacher à sa véritable origine, et à montrer d'abord que, si les termes du second degré dans l'équation d'une quadrique ont la forme

$$(1) \quad ax^2 + a'y^2 + a''z^2 + K(bx + b'y + b''z)^2,$$

l'équation en S sera

$$(2) \quad 1 = \frac{Kb^2}{S-a} + \frac{Kb'^2}{S-a'} + \frac{Kb''^2}{S-a''},$$

et, sous cette forme, la proposition s'étend à un nombre quelconque de variables. Maintenant, dans le cas des surfaces du second degré, les termes du second degré

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2B'yz + 2B''zx + 2B'''xy$$

peuvent toujours se ramener à la forme (1), et s'écrire

$$\left(A - \frac{B'B''}{B}\right)x^2 + \left(A' - \frac{BB''}{B'}\right)y^2 + \left(A'' - \frac{BB'}{B''}\right)z^2 + BB'B''\left(\frac{x}{B} + \frac{y}{B'} + \frac{z}{B''}\right)^2.$$

(1) Voir *Bulletin*, t. II, p. 75.

Cette manière de présenter la question offrirait quelques avantages; il y a beaucoup de surfaces pour lesquelles les termes du 2^e degré se présentent directement sous la forme (1), par exemple les cônes circonscrits, et les élèves sauraient alors, presque sans calcul, écrire l'équation aux axes principaux.

LEMONNIER (H.). — *Démonstration des expressions de $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$.*

HERMANN (H.). — *Sur une propriété du cône de révolution.*

SAINT-GERMAIN (A. DE). — *Etude géométrique sur une question de licence.* (6 p.)

Déterminer les conoïdes droits pour lesquels les rayons de courbure principaux en chaque point sont égaux et dirigés en sens contraire.

BERTRAND (J.). — *Compte rendu de l'Ouvrage : Tables de Logarithmes à 27 décimales pour les calculs de précision*, par FEDOR THOMAN. (14 p.)

SMITH (ST.). — *Propriétés focales des figures homographiques.* (7 p.)

Cet article est un extrait d'un Rapport présenté par M. Smith à la Société Royale de Londres; il contient une Notice historique relative aux différentes recherches qui ont été faites sur les figures homographiques.

ANDRÉ (D.). — *Sur le développement du binôme.*

ELLIS (R.-L.). — *Démonstration de deux théorèmes relatifs à une surface du 2^e degré.*

AMIGUES (E.). — *Notes sur les sommes des puissances semblables des n premiers nombres entiers.*

OPPERMANN (L.). — *Sur la méthode d'interpolation de Newton.*

Reproduction, avec les notations modernes et des simplifications, de la marche suivie par Newton.

FITREMANN. — *Remarques sur les racines carrées et cubiques.*

CHASLES. — *Détermination, par le principe de correspondance,*

de la classe de la développée et de la caustique par réflexion d'une courbe géométrique d'ordre m et de classe n . (8 p.)

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

STOUFF. — *Note sur la détermination des facteurs premiers d'un nombre.*

MOREL (A.). — *Problème de Géométrie analytique plane sur les coniques.*

AMIGUES (E.). — *Note sur un procédé nouveau pour trouver les cubes de certaines sommes. (5 p.)*

WALTON (W.). — *Des coordonnées bi-angulaires. (13 p.)*
(Traduit du *Quarterly Journal*.)

DAY (H.-G.). — *Démonstration géométrique d'un théorème sur l'ellipse.*

(Extrait du même Recueil.)

Si d'un point P d'une ellipse je mène une perpendiculaire sur le grand axe, et que je la prolonge jusqu'au point Q où elle rencontre le cercle décrit sur le grand axe comme diamètre, le diamètre qui passe par le point P sera égal à la corde menée dans ce cercle par le point F parallèlement au rayon OQ.

AUGIER. — *Solution de la question proposée au Concours général de 1870. (7 p.)*

On donne dans un plan deux ellipses ayant leurs axes dirigés suivant les mêmes droites; on considère deux cônes égaux, de même sommet et ayant respectivement pour directrices les deux coniques données. On demande le lieu des sommets de ces cônes.

CHASLES. — *Propriétés des systèmes de coniques relatives, toutes, à certaines séries de normales en rapport avec d'autres lignes en divers points. (17 p.)*

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

MAXWELL (J.-Cl.). — *Sur la cyclide. (20 p.)*
(Traduit du *Quarterly Journal*.)

Ce travail, déjà ancien, présente une étude très-intéressante de la forme et des propriétés de la cyclide.

CHASLES. — *Propriétés des systèmes de coniques, dans lesquels se trouvent des conditions de perpendicularité entre diverses séries des droites.* (12 p.)

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

ANONYME. — *Note sur la résolution en nombres entiers et positifs de l'équation $x^m = y^n + 1$.*

ANDRÉ (D.). — *Théorèmes d'Arithmétique.*

ROBERTS (S.). — *Note sur les podaires centrales des coniques.*

LINDELÖF (L.). — *Quelques problèmes relatifs à l'ellipse et à l'ellipsoïde.* (10 p.)

(Traduit des *Comptes rendus de la Société des Sciences de Finlande.*)

L'auteur examine des questions de maximum telles que celles-ci : Trouver l'ellipse minimum circonscrite à un triangle donné, l'ellipsoïde maximum inscrit dans un tétraèdre donné, etc.

ANDRÉ (D.). — *Sur les combinaisons simples.*

CHASLES. — *Théorèmes concernant les systèmes de coniques représentés par deux caractéristiques.* (14 p.)

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

BOURGET (J.). — *Des permutations.* (14 p.)

Cet élégant article contient plusieurs propositions relatives aux permutations. Grâce à une notation nouvelle, l'auteur a pu étudier les dérangements ou inversions, déterminer leur nombre maximum, toutes celles qui ont le même nombre de dérangements, etc.

MOREL (A.). — *Exposé d'une théorie (Géométrie élémentaire) des sections coniques.* (2 art., 24 p.)

HOÜEL (J.). — *Compte rendu de l'Ouvrage : Elementi di Geometria; par MM. A. SANNIA et d'OVIDIO.* (7 p.)

ANDRÉ (D.). — *Analyse indéterminée. Problèmes.*

STEEN (Ad.). — *Démonstration élémentaire de la formule de Simpson.*

ANONYME. — *Note relative à la courbure en un point de rebroussement.*

PAINVIN (L.). — *Lieu des sommets des trièdres trirectangles dont les côtés sont normaux à une surface du second ordre.* (22 p.)

ANDRÉ (D.). — *Développements de $\sin(n\alpha + z)$, de $\cos(n\alpha + z)$, de $\sin^n \alpha$ et de $\cos^n \alpha$.* (10 p.)

ANDRÉ (D.). — *Sommation de certains développements.*

CHASLES. — *Propriétés des courbes d'ordre et de classe quelconques démontrées par le principe de correspondance.* (17 p.)
(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXXII.)

TRANSON (A.). — *De quelques effets d'optique relatifs à la perspective.* (9 p.)

ANDRÉ (D.). — *Deux théorèmes sur la parabole.*

PAINVIN (L.). — *Note sur un système variable de trois directions rectangulaires.* (9 p.)

Il s'agit du système formé par la tangente à une courbe, la normale principale et la binormale. L'auteur détermine les conditions auxquelles satisfait nécessairement un tel système.

PAINVIN (L.). — *Nombre des systèmes de plans que peut représenter une équation du second degré.* (6 p.)

On suppose que les coefficients soient des fonctions entières du degré m de trois indéterminées. Le nombre est $10m^2$ en général.

GRAINDORGE (J.). — *Questions de licence.*

Trouver le mouvement d'un point matériel sollicité par deux forces dirigées vers un centre : l'une attractive et proportionnelle à la distance ; l'autre répulsive et en raison inverse du cube de la distance.

RUCHONNET (Ch.). — *De l'hélice osculatrice.*

WOLSTENHOLME (J.). — *Exercices sur le tétraèdre.*

PAINVIN (L.). — *Théorème sur les surfaces.* (7 p.)

Ce théorème se rapporte à la transformation définie par Jacobi dans le dernier travail posthume publié dans le *Journal de Borchardt*.

SANCERY (L.). — *Note sur le quadrilatère inscrit dont les diagonales sont rectangulaires.* (12 p.)

ANDRÉ (D.). — *Théorèmes de Statique.* (6 p.)

WALTON (W.). — *Démonstration du théorème de Cauchy : « Toute équation a une racine. »* (5 p.)

CHASLES. — *Propriété des diamètres des courbes géométriques.* (24 p.)

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. LXII.)

BESANT (W.-H.). — *Exercices pour la licence.*

PROCEEDINGS OF THE LONDON MATHEMATICAL SOCIETY.

T. III, NOV. 1869 à NOV. 1871 (1).

HANLON (G.-O.). — *La veine contracte.* (2 p.)

CLERK MAXWELL (J.). — *Remarques sur le Mémoire précédent.* (2 p.)

CLERK MAXWELL (J.). — *Sur le potentiel d'un disque circulaire uniforme.* (2 p.)

CLIFFORD (W.-K.). — *Sur les relations syzygétiques contenant un grand nombre de quantiques linéaires.* (4 p.)

L'auteur se propose, dans ce travail, de généraliser les théorèmes principaux de la *Géométrie de direction* de M. Paul Serret.

SMITH (J.-S.). — *Sur les propriétés focales des figures corrélatives.* (1 p.)

CROFTON (W.). — *Démonstration du théorème de Gauss et des analogies de Neper.* (1 p.)

ROBERTS (S.). — *Sur l'origine du discriminant des formes ternaires.* (3 p.)

L'auteur se propose, dans cet article, de donner une démonstration analytique des résultats que M. Cremona a obtenus par la

(1) Voir *Bulletin*, t. III, p. 344.

Géométrie, et qui sont relatifs à l'influence des points multiples communs à des courbes en involution. (*Voir* p. 261-262 de la traduction allemande de l'*Introduction à la Théorie géométrique des Courbes planes*.)

CAYLEY (A.). — *Sur la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde*. (2 p.)

CAYLEY (A.). — *Mémoire sur les surfaces du 4^e ordre*. (48 p.)

Les premiers progrès importants faits dans la théorie des surfaces du 4^e ordre sont dus, comme on le sait, à M. Kummer. D'une part, cet éminent géomètre, dans un travail devenu classique, a recherché toutes les surfaces du 4^e ordre sur lesquelles se trouvent des séries de coniques, et, de cette manière, il a trouvé toutes celles de ces surfaces qui contiennent une ligne double, la surface de Steiner, les surfaces ayant une droite ou une conique double, etc. D'autre part, un second Mémoire très-important, mais non moins connu des géomètres, a été publié par M. Kummer dans les Mémoires de l'Académie de Berlin. Ce travail, qui se vend séparément, comme tous ceux qui sont insérés dans le Recueil cité, est intitulé : « Sur les systèmes de rayons rectilignes, et en particulier sur ceux du 1^{er} et du 2^e ordre » (¹). Dans un travail antérieur, qui a paru au *Journal de Crelle* et qui a été traduit dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, M. Kummer avait étudié d'une manière générale les systèmes de rayons rectilignes. Dans le second Mémoire, l'auteur se propose de déterminer tous ceux de ces systèmes qui sont algébriques et d'un ordre égal ou inférieur à 2.

Tout système de rayons rectilignes se compose, on le sait, d'un certain groupe de tangentes doubles d'une surface, qu'on appelle la surface focale du système. Les différentes surfaces focales rencontrées par M. Kummer présentent ce fait singulier que, dans le cas général, *elles n'ont que des points doubles* et pas de ligne multiple.

On a d'abord la surface à 16 points singuliers, belle générali-

¹) KUMMER : *Ueber die algebraischen Strahlensysteme, insbesondere über die der ersten und zweiten Ordnung*. Mathematische Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, aus dem Jahre 1866. Berlin, 1867, F. Dümmler's Verlagsbuchhandlung.

sation du tétraédroïde de M. Cayley et de la surface des ondes de Fresnel. C'est à juste titre que la surface générale à 16 points singuliers a été nommée par les géomètres *surface de Kummer*.

En même temps que cette surface, l'auteur en indique d'autres qui ont 15, 14, 13, 12, 11 points singuliers; mais, avec celles-ci, la recherche qu'il avait entreprise est complète, et l'étude des rayons rectilignes de 2^e ordre ne peut donner de surfaces ayant moins de 11 points singuliers.

M. Cayley se propose de présenter une esquisse de la théorie des surfaces du 4^e ordre ayant des points multiples (*nodes*). On sait que le nombre de ces points multiples ne peut dépasser 16; il suffit, depuis les recherches de M. Kummer, d'étudier les surfaces ayant 10 points doubles ou moins de 10 points. L'auteur considère successivement tous les cas possibles. Les plus intéressants sont ceux qui correspondent à 8, 9, 10 points singuliers. La surface à 10 points singuliers est la discriminante d'un système de 4 quadriques. L'auteur établit les relations essentielles entre cette surface, qu'il appelle *symmetroid*, et la *jacobienne* du même système. Il considère aussi comme cas particulier la *hessienne* d'une surface cubique.

Ce Mémoire, contenant une foule de faits importants, doit évidemment être consulté, d'abord, comme ceux que nous citerons plus loin, par les personnes qui voudront entreprendre des recherches sur la théorie des surfaces du 4^e ordre à points multiples. Quelques résultats d'une Note publiée au tome I du *Bulletin*, p. 354, sur la *discriminante*, se trouvent dans le Mémoire antérieur de M. Cayley.

. WALKER (J.-J.). — *Sur les points correspondants dans certaines involutions*. (12 p.)

CLIFFORD (W.-K.). — *Sur un cas d'évaporation dans l'ordre résultant*. (3 p.)

CLERK MAXWELL. — *Sur le mouvement des fluides*. (7 p.)

ROBERTS (S.). — *Sur la podaire des sections coniques*. (12 p.)

L'auteur revient sur un résultat élégant qu'il avait indiqué dans le Volume précédent, et qu'on peut énoncer ainsi :

Étant donnés deux cercles A, B, si le centre de A se trouve sur B, tout point invariablement lié à une droite dont la longueur est

le rayon de A, et dont les extrémités s'appuient sur les deux cercles A, B, décrit une podaire de section conique.

CAYLEY (A.). — *Note sur la description mécanique précédente des podaires de coniques.*

M. Cayley établit uniquement qu'elles sont unicursales.

ROBERTS (S.). — *Sur les ovales de Descartes.* (20 p.)

Description de la courbe au moyen des cercles. — Sur un système d'ovales. — Sur la normale, etc.

CAYLEY (A.). — *Sur la transformation rationnelle entre deux espaces.* (53 p.)

L'auteur considère, dans ce Mémoire, les transformations rationnelles réciproques dont nous avons déjà parlé à nos lecteurs. La première Partie est consacrée à la transformation homographique sur deux lignes droites. La seconde concerne les transformations entre deux plans, découvertes par M. Cremona. L'auteur donne, pour ces transformations, des Tables très-étendues, comprenant un grand nombre de cas; puis il étudie la transformation quadrique entre deux plans, donne les formules générales et examine les cas particuliers. Après avoir étudié cette transformation, il développe l'algorithme imaginé par M. Clifford pour ramener toute transformation de M. Cremona à une suite de transformations quadratiques. Enfin, laissant de côté le cas du plan, M. Cayley examine la difficile question de la correspondance entre deux figures dans l'espace, et il est ainsi conduit à l'examen des transformations suivantes : 1^o celle qu'il appelle *quadri-quadrique*, et qui se ramène par l'homographie à une transformation par rayons vecteurs réciproques; 2^o la *quadri-cubique*, qui était inconnue auparavant, et dans laquelle aux plans de la première figure correspondent, dans l'autre, des quadriques passant par une droite et 3 points, et aux plans de la deuxième figure correspondent dans la première des surfaces réglées du 3^e ordre; 3^o enfin la cubo-cubique, qui est la transformation de Magnus, étendue à l'espace.

CAYLEY (A.). — *Sur les ovales de Descartes à deux foyers imaginaires.* (2 p.)

CAYLEY (A.). — *Aperçu sur les recherches récentes relatives aux surfaces du 4^e ordre et du 5^e ordre.* (9 p.)

CAYLEY (A.). — *Note sur la théorie de la transformation rationnelle entre deux plans.* (2 p.)

CAYLEY (A.). — *Second Mémoire sur les surfaces du 4^e ordre.* (5 p.)

WALKER (J.-J.). — *Sur le système des tangentes à la cubique plane et à la courbe du 4^e ordre.* (6 p.)

L'auteur entend par système des tangentes l'ensemble de celles qui passent par un point, au sujet desquelles il donne plusieurs théorèmes.

ROBERTS (S.). — *Sur l'ordre et les singularités de la courbe parallèle à une courbe algébrique.* (12 p.)

L'auteur donne toutes les singularités ordinaires de la courbe.

CAYLEY (A.). — *Un théorème analytique sous un nouveau point de vue.* (1 p.)

CAYLEY (A.). — *Sur un problème de calcul des variations.* (1 p.)

CLERK MAXWELL (J.). — *Remarque sur la classification mathématique des quantités physiques.* (9 p.)

CAYLEY (A.). — *Troisième Mémoire sur les surfaces du 4^e ordre.* (32 p.)

Ce Mémoire traite des mêmes sujets que les précédents du même Volume; il contient bon nombre de tableaux et de résultats nouveaux.

STRUTT (W.). — *Note sur l'explication de la couronne donnée dans les leçons d'Optique physique de Verdet, et dans d'autres Ouvrages.* (2 $\frac{1}{2}$ p.)

GRIFFITHS (J.). — *Sur le problème de trouver le cercle qui coupe trois cercles donnés sous des angles donnés.* (11 p.)

L'auteur résout le problème et donne ensuite plusieurs développements analytiques dignes d'intérêt.

CAYLEY (A.). — *Sur les modèles de Plücker pour certaines surfaces du 4^e ordre.* (6 p.)

ROBERTS (S.). — *Du mouvement d'un plan sous certaines conditions.* (32 p.)

L'auteur s'occupe d'une question très-intéressante et qui n'a pas encore été étudiée avec le soin qu'elle mérite. Il examine, au point de vue de la Géométrie analytique, les différentes espèces de mouvement d'une figure plane dans son plan. Si l'on suppose que deux points de la figure soient assujettis à décrire deux courbes C_m , $C_{m'}$, d'ordres m , m' , tout autre point décrira une courbe d'ordre $2mm'$, et de classe $2mm'(m + m' - 1)$. Les nombres s'abaissent si les courbes ont des directions asymptotiques communes, ou si elles contiennent les points circulaires à l'infini, etc. L'auteur examine aussi le cas où il y a une seule directrice et les enveloppes des différentes lignes de la figure, ainsi que les deux lieux des centres instantanés dans les deux figures. La méthode qu'il a suivie est fondée sur de remarquables théorèmes d'Analyse de M. G. Salmon.

G. D.

VIERTELJAHRSSCHRIFT DER NATURFORSCHENDEN GESELLSCHAFT IN ZÜRICH.
Redigirt von Dr RUDOLF WOLF, Professor der Astronomie in Zürich. — Zürich,
in Commission bei S. Höhr.

15. Jahrgang, 1870 (1).

CULMANN (K.). — *Sur le parallélogramme et sur la composition des forces.* (24 p.)

On obtient d'une manière très-simple les propositions de la Statique par l'emploi de la méthode analytique, qui a déjà fait faire, dans ces derniers temps, de si grands progrès à la Géométrie, et qui consiste à introduire dans le calcul les symboles qui représentent les équations des lignes et des points. A l'aide de cette notation symbolique, la composition des forces concourantes en un même point se réduit à une formule de sommation $\Sigma \alpha A$, α étant la forme normale de l'équation du point à l'infini dans le système des coordonnées de Plücker, et A la grandeur de la force; la composition des forces dans le plan se réduit à une formule analogue $\Sigma a A$, a étant l'équation normale de la ligne de direction de la force dans le plan en coordonnées ordinaires. Enfin la combinaison de ces deux

(1) *Bulletin trimestriel de la Société des Naturalistes de Zürich.* Rédigé par M. R. WOLF. Zürich, chez S. Höhr. — Paraît par fascicules petit in-8°. En allemand et en français.

formules donne la composition des forces dans l'espace. Par cette méthode, la Statique vient prendre place à côté de la Géométrie analytique, comme la Statique graphique se ramène à la Géométrie de position, et l'introduction des nouveaux symboles fait ressortir l'identité des deux branches de la Statique, comme elle l'a déjà fait pour les deux branches de la Géométrie. La cause intime de cette affinité provient de ce que le parallélogramme des forces est une proposition géométrique, qui peut se démontrer géométriquement. A la suite de cette démonstration vient le développement des deux formules de sommation, dont nous venons de parler.

SCHWARZ (H.-A.).— *Sur l'intégration de l'équation aux différentielles partielles* $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ pour la surface d'un cercle. (16 p.)

Dans sa dissertation inaugurale (art. 18, 19, 21) et dans son Mémoire sur les fonctions abéliennes (*Journal de Borchardt*, t. 54, p. 112, 114), Riemann a énoncé quelques théorèmes généraux concernant l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

dans l'étendue d'une aire T , sous certaines conditions relatives aux limites et aux discontinuités. Ces théorèmes n'ont pas encore été rigoureusement démontrés, même dans le cas simple et important où l'aire donnée se réduit à un cercle.

Si la valeur de la fonction cherchée u en chaque point du contour de l'aire est donnée sans autre restriction que d'être assujettie à la continuité, on n'a pas le droit d'admettre que cette fonction ait, le long du contour, des dérivées partielles finies $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial p}$ (p étant la distance d'un point de l'intérieur au contour, comptée sur la normale); car, d'après l'hypothèse que l'on a faite, il n'existe pas, en général, de dérivées partielles de la fonction u le long du contour, comme l'a fait remarquer M. Weierstrass dans ses leçons, il y a déjà plusieurs années.

M. Schwarz se borne à considérer le cas où l'aire à l'intérieur de laquelle se meut le point (x, y) est celle d'un cercle tracé sur un

plan simple, la fonction n'ayant sur le contour aucun point de discontinuité.

FIEDLER (W.). — *Sur les coordonnées projectives*. (31 p.)

Le mode de détermination des figures dans la Géométrie synthétique conduit, comme on sait, aux systèmes de coordonnées de la Géométrie analytique. M. Chasles, dans sa *Géométrie supérieure*, et v. Staudt, dans ses *Beiträge zur Geometrie der Lage*, ont fait usage, pour cette détermination, des rapports anharmoniques, sans toutefois s'en servir pour établir les équations de la droite, du point et du plan, ce qui est fondamental pour la Géométrie analytique. L'emploi des rapports anharmoniques conduit très-simplement à ces équations, en cherchant à introduire dans le développement analytique la dualité inhérente à la nature du rapport anharmonique, telle qu'elle se présente dans le développement de la Géométrie synthétique. L'idée essentielle de cette extension se trouve déjà dans les travaux de W.-R. Hamilton sur les quaternions (1860). M. Fiedler fait voir que l'on obtient par là précisément les systèmes de coordonnées désignés, dans le plan, sous les noms de coordonnées trimétriques, triponctuelles, trilinéaires ou triangulaires, et, dans l'espace, sous ceux de tétramétriques, etc., ou tétraédriques, et qui, depuis longtemps, sous la dénomination de *coordonnées homogènes*, sont presque exclusivement en usage dans les recherches scientifiques. On les obtient ainsi dans toute leur généralité, et l'on aperçoit aisément les modes de particularisation les plus avantageux dans les divers cas. La clarté géométrique que l'on gagne ainsi jette un jour nouveau sur la dépendance des coordonnées générales avec les coordonnées ponctuelles de Descartes et les coordonnées de lignes et de plans de Plücker.

WOLF (R.). — *Communications astronomiques*. (2 art., 32-43 p.)

Observations des taches du Soleil dans l'année 1869, et calcul des nombres relatifs et des variations de cette année. Quelques considérations sur l'époque actuelle du maximum. Sur les variations de déclinaison observées à Bombay. Nouvelles recherches sur l'anomalie singulière qui peut se présenter dans la détermination de l'équation personnelle; essai d'une explication sur cette anomalie.

Observations des taches du Soleil pendant les années 1754-1758

et 1769. Nouvelle détermination de l'époque du minimum en 1755 et de l'époque du maximum en 1769. Marche moyenne du phénomène des taches solaires, comparaisons de cette marche avec d'autres phénomènes. Observations magnétiques à Prague en 1779 ; leur comparaison avec la variation observée par M. Wolf au moyen des taches solaires. Communications de M. Fritz sur les taches solaires, les aurores boréales et le magnétisme terrestre, avec un catalogue des aurores boréales observées en Suisse. Notices sur les Ouvrages relatifs à la constitution du Soleil.

SCHNEEBELI (H.). — *Sur la durée du contact dans le choc des corps élastiques.* (15 p.)

L'auteur emploie pour la mesure des temps très-courts un procédé ingénieux dû à Pouillet, et qui consiste à faire agir sur un galvanomètre très-sensible un courant assez fort et d'intensité constante. Il a expérimenté sur le choc de deux pièces d'acier trempé, l'une fixe, l'autre mobile, et il est parvenu, en faisant varier les circonstances du choc, à établir les lois suivantes :

- 1° La durée du choc croît avec la masse du corps choquant ;
- 2° Elle diminue, au contraire, lorsqu'on fait croître la vitesse avec laquelle le corps choquant rencontre le plan fixe ;
- 3° La durée du choc est d'autant moindre que le rayon de courbure de la surface choquante est plus grand.

SCHWARZ (H.-A.). — *Sur un passage à la limite par un procédé alternant.* (15 p.)

On sait que le théorème auquel Riemann a donné le nom de *principe de Dirichlet*, et dont il a fait la base de ses recherches sur les fonctions de variables complexes, n'a pas encore été démontré d'une manière pleinement satisfaisante. M. Schwarz, en poursuivant ses recherches sur certains problèmes de représentation (*Abbildung*), recherches publiées en partie dans le Tome 70 du *Journal de Borchart* et dans le Programme de l'École Polytechnique fédérale pour 1869-1870, a été conduit à un mode de démonstration qui lui permet d'établir rigoureusement tous les théorèmes que Riemann, dans ses Mémoires publiés, a cherché à démontrer au moyen du principe de Dirichlet.

Il ne s'agit au fond que d'établir l'existence d'une fonction u des variables réelles x, y , qui, dans l'étendue d'une aire donnée T , vé-

rifie l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

et qui satisfasse, en outre, à certaines conditions données aux limites et aux points de discontinuité. Dans l'Extrait qu'il donne ici de son travail, l'auteur se borne au cas où toutes les conditions données se rapportent aux limites, et dans lequel on exige que la fonction u soit toujours finie, et prenne, le long du contour de T , des valeurs finies données, appartenant à une ou à plusieurs suites continues. On peut ramener à ce cas particulier le cas général, comme l'auteur le fera voir dans une communication ultérieure.

Le procédé de M. Schwarz ne suppose nullement que la courbure du contour de l'aire soit toujours finie, et n'exclut pas les discontinuités de la direction de la tangente ; le contour peut présenter une infinité de points saillants.

Le succès de la démonstration repose, en dernier ressort, sur le lemme suivant :

Concevons le contour de l'aire T partagé en un nombre fini de segments, et ceux-ci divisés en deux groupes, dont chacun contienne au moins un segment ; affectons chaque segment d'un indice impair ou pair, suivant qu'il appartiendra au premier ou au second groupe, et désignons par P les points qui séparent les segments d'indice pair des segments d'indice impair. A l'intérieur de T , imaginons que l'on donne un nombre fini de lignes analytiques L , qui n'aient aucun point commun avec les segments d'indice impair, à moins que ce ne soit quelque une des extrémités P , et qui ne soient pas tangentes à ces segments en ces points P . Si l'on suppose maintenant une fonction u déterminée à l'intérieur de T , de manière à satisfaire à l'équation $\Delta u = 0$, et à prendre en chaque point du contour la valeur 0 ou ± 1 , selon la parité de l'indice du segment auquel ce point appartient, le maximum de la valeur que la fonction u peut prendre le long des lignes L est un nombre positif q , moindre que l'unité.

Après avoir démontré (comme l'auteur l'a déjà fait dans un Mémoire précédent, pour le cas du cercle) l'existence, pour des formes d'aire simples, d'une fonction vérifiant l'équation $\Delta u = 0$ et satisfaisant à des conditions données aux limites, il s'agit d'étendre la démonstration à des formes d'aire plus compliquées, composées,

en quelque sorte, au moyen des formes simples. On peut se servir, pour cela, d'un passage à la limite, qui a une grande analogie avec l'épuisement de l'air d'un espace clos, au moyen d'une machine pneumatique à deux corps de pompe. Dans les deux cas, en effet, l'opération consiste en deux opérations partielles alternantes, concourant au même but, d'une manière qui n'est pas identique, mais que l'on pourrait plutôt appeler symétrique.

MOUSSON (A.). — *Remarques sur la theorie des phénomènes capillaires.* (17 p.)

SCHNEEBELI (H.). — *Communications sur la Physique.* (4 p.)

I. Suite des recherches sur la durée du contact dans le choc des corps élastiques. — II. Sur les ondulations d'une couche fluide dans un corps vibrant transversalement.

WOLF (R.). — *Notes sur l'histoire des Sciences en Suisse.*

L'auteur publie, sous ce titre, une suite de documents inédits ou peu connus, relatifs à des Ouvrages anciens ou à la biographie des savants. Nous remarquons dans le présent Volume une suite de la correspondance du célèbre constructeur d'instruments Repsold avec Horner ; une Note relative à la correspondance des Bernoulli, dont on n'a pas encore retrouvé la trace ; des documents sur Oppikofer et Ernst, inventeurs d'un planimètre, sur lequel Puissant a fait un rapport à l'Académie des Sciences en 1835 ; enfin une suite très-intéressante de lettres du baron de Zach à Horner. On sait que la volumineuse correspondance de Zach, qui aurait pu être d'une si haute importance pour l'histoire scientifique, avait été, après sa mort, remise aux mains de Lindenau, qui, plus tard, eut l'idée inconcevable de la livrer aux flammes. M. Wolf publie des extraits, d'autant plus curieux, des lettres de Zach, restées dans la famille de Horner.

BULLETINS DE L'ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES DE BELGIQUE.

T. XXXII, juillet-décembre 1871 (1).

QUETELET (A.). — *Sur le développement des qualités physiques, morales et intellectuelles de l'homme.* (2 p.)

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 281.

MONTIGNY (CH.). — *Notice sur la production successive d'éclairs identiques aux mêmes lieux de l'atmosphère pendant l'orage du 2 juillet 1871.* (4 p.)

FERBY (F.). — *Aspect de la planète Mars en 1871.* (9 p.)

Dans une première Notice, insérée aux *Bulletins* (t. XXXI), l'auteur a résumé les résultats de ses observations de la planète Mars pendant les oppositions de 1864 et de 1867. Le but du présent travail est de faire connaître avec précision l'aspect que cet astre a offert à la Terre en 1871, et d'établir quelques rapports entre les nouveaux dessins et les précédents, afin d'en faciliter la comparaison.

HOUSSEAU (J.-C.). — *D'un moyen de mesurer directement la distance des centres du Soleil et de Vénus pendant le passage de cette planète.* (6 p.)

Les astronomes admettent généralement qu'il faudra employer, pour l'observation du prochain passage de Vénus sur le Soleil, en décembre 1874, des mesures plus nombreuses et plus exactes que celles de 1761 et 1769, qui étaient principalement relatives aux contacts, si l'on veut obtenir une grande approximation dans la valeur que l'on en déduira pour la parallaxe du Soleil.

On a proposé d'employer l'héliomètre pour mesurer un grand nombre de fois, pendant les six à sept heures que doit durer le passage, les distances entre les bords des disques, d'où l'on pourrait conclure celle des centres; mais ce moyen semble inférieur à celui qui consisterait à prendre directement les distances de centre à centre, au moyen d'un héliomètre modifié, à images inégales, c'est-à-dire dont les deux demi-objectifs auraient des longueurs focales différentes.

En supposant que le moindre grossissement fût 31 fois inférieur au grossissement principal, on pourrait centrer exactement le petit Soleil sur le disque de Vénus dans la grande image.

L'auteur donne quelques détails sur la construction et le manie-ment de l'héliomètre à grossissements inégaux dont il propose l'emploi.

PLATEAU (J.). — *Une expérience relative à la question de la vapeur vésiculaire.* (5 p.)

On sait, d'après un travail de M. Duprez ⁽¹⁾, que, lorsqu'un vase plein d'eau est retourné, l'orifice ouvert en bas, il n'est pas nécessaire, pour que l'eau y demeure suspendue, que cet orifice soit très-étroit; à l'aide de précautions particulières, M. Duprez a soutenu ainsi l'eau dans un tube vertical ayant près de 0^m,02 de diamètre intérieur. Supposons que l'on mette alors en contact, avec la surface intérieure libre de cette eau suspendue, une très-petite bulle creuse d'eau; l'air qu'elle contient en sera aussitôt chassé et s'élèvera au travers du liquide. Imaginons maintenant que, d'une certaine distance au-dessous de la surface intérieure de l'eau, monte un courant de vapeur d'eau. Si cette vapeur se compose de vésicules, l'ensemble des bulles qui toucheront l'eau devra donner naissance à une sorte de nuage qui s'élèvera lentement dans le tube en altérant la transparence de l'eau.

Or l'expérience faite, à la demande de l'auteur, par M. Duprez ne confirme pas cette prévision, et M. Plateau la considère comme constituant, sinon une preuve convaincante, du moins un argument très-puissant contre l'hypothèse de l'état vésiculaire de la vapeur.

Une autre objection contre cet état résulte de la pression considérable que l'air subirait dans l'intérieur des vésicules.

DE TILLY (J.-M.). — *Note sur le roulement des rouleaux et des roues sur un plan d'appui*. (28 p.)

L'auteur étudie d'abord le mouvement d'un rouleau, soumis à une percussion initiale, sur un plan horizontal en apparence, mais exerçant contre le rouleau des résistances qui dépendent du mouvement de celui-ci. Il traite ensuite de la théorie du mouvement uniforme des voitures à un et à deux trains.

Ces questions, bien qu'appartenant aux premiers éléments de la Mécanique, ont été résolues parfois d'une manière inexacte. Les erreurs provenaient principalement de ce qu'on ne mettait pas en évidence le rôle de la réaction totale du plan d'appui contre les rouleaux et les roues, et de ce qu'on ne prenait pas la peine de vérifier toutes les équations qui doivent exister, pour chaque système rigide, entre les forces agissant réellement sur lui et les forces directement capables des variations de mouvement que ce système subit.

(1) *Mémoires de l'Académie royale de Belgique*, t. XXVI et XXVIII.

QUETELET (A.). — *Sur les étoiles filantes de la période de novembre 1871 et sur les aurores boréales des 9 et 10 du même mois.* (7 p.) — *Sur l'abaissement de température du mois de décembre 1871.* (2 p.)

SALTEL (L.). — *Extrait d'une lettre à M. Catalan.* (1 p.)

Cet Extrait contient la définition d'un mode très-général de transformation des figures planes.

BULLETIN DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES DE SAINT-PÉTERSBOURG.

T. XV, 1870 (1).

WILD (H.). — *De la détermination du poids d'un décimètre cube d'eau distillée à 4 degrés C.* (13 col.)

SABININE (G.). — *Sur la méthode de distinguer les maxima et les minima des intégrales définies multiples.* (12 col.)

Dans un Mémoire inséré au t. 56, p. 122, du *Journal de Borchardt* (2), M. Clebsch a donné la discussion de la variation seconde $\delta^2 V$ d'une intégrale définie multiple V , dont il s'agit de distinguer les maxima des minima. En étendant à une intégrale multiple le théorème donné par Jacobi pour une intégrale simple (3), M. Clebsch emploie, pour la réduction de la variation $\delta^2 V$, des procédés qui découlent des principes de la méthode de Legendre (4). M. Sabinine propose pour cette réduction un moyen plus convenable, fondé sur une substitution directe de certaines expressions algébriques linéaires de quantités arbitraires à la place des variations tronquées $\omega_1, \omega_2, \dots$, que subissent les fonctions qui se trouvent sous le signe de l'intégrale multiple.

WILD (H.). — *Sur la compensation complète pour la température du baromètre à balance.* (9 col.; all.)

SOMOF (J.). — *Note sur la rectification approximative des courbes quelconques.* (4 col.)

(1) Voir *Bulletin*, t. I, p. 240.

(2) *Ueber die zweite Variation vielfacher Integrale.*

(3) *Zur Variationsrechnung und Differentialgleichungen.* (*Journal de Crelle*, t. 17.)

(4) *Sur la manière de distinguer les maxima et les minima dans le calcul des variations.* (*Mémoires de l'Académie des Sciences*, 1786, p. 7.)

De ses travaux antérieurs sur la Cinématique, l'auteur a déduit le théorème suivant, pour l'expression de la longueur d'un arc de courbe suffisamment petit pour qu'on en puisse négliger la 5^e puissance :

La longueur de l'arc est égale aux $\frac{4}{3}$ de la corde, moins $\frac{1}{6}$ de la somme des projections de cette corde sur les tangentes extrêmes.

Il donne ici une démonstration directe de cette proposition, et l'applique au calcul d'un arc d'ellipse.

STEBNITZKI (J.). — *Déviations du fil à plomb produites par l'attraction des monts du Caucase.* (12 col.; all.)

ARGELANDER (Fr.). — *Observations de tremblements de terre au moyen de niveaux très-sensibles.* (3 col.; all.)

SAVITCH (A.). — *Observations des planètes à Saint-Petersbourg.*

Oppositions de Vesta et de Neptune, en 1869.

T. XVI, 1871.

GYLDÉN (H.). — *De l'influence que les déplacements de l'axe de rotation dans l'intérieur de la Terre peuvent exercer sur le niveau de la mer.* (7 col.; all.)

L'auteur conclut, d'un calcul fait pour un cas fictif plus simple, que les variations de niveau provenant des déplacements possibles de l'axe de rotation dans l'intérieur du globe ne sauraient être assez considérables pour expliquer les élévations et les dépressions du fond de la mer que l'on observe dans certaines contrées.

LIPKINE (L.). — *Dispositif articulé pour la transformation rigoureuse du mouvement circulaire en mouvement rectiligne.* (3 col.; all.)

ZOLOTAREF (G.). — *Note relative à une formule de M. Liouville.* (3 col.)

Démonstration d'une formule contenue dans une lettre de M. Liouville à M. Le Besgue (*Journal de Mathématiques*, cahier d'avril 1870).

SOMOF (J.). — *Sur un moyen algébrique de démontrer le prin-*

cipe de Hamilton, relatif à l'intégration des équations de la Dynamique. (10 col.)

L'auteur retrouve, sans s'appuyer sur le calcul des variations ni sur le principe de la moindre action, les résultats obtenus par M. Liouville (*Comptes rendus*, 16 juin 1856, et *Journal de Mathématiques*, 2^e série, t. I, p. 297).

WILD (H.). — *Méthodes perfectionnées pour la compensation de température du baromètre à balance.* (15 col., 1 pl.; all.)

MINDING (F.). — *Sur la méthode des moindres carrés.* (3 col.; all.)

A l'aide d'une substitution linéaire, appliquée à l'expression de la somme des carrés des erreurs, l'auteur obtient une transformation de cette expression, au moyen de laquelle il établit très-simplement l'expression générale donnée par Gauss pour le poids d'une fonction quelconque.

GLASENAPPE (S.-V.). — *Sur l'apparition de la comète d'Encke en 1871.* (11 col.; all.)

KARKINE (A.). — *Sur le théorème de Poisson et son réciproque.* (5 col.)

On démontre, comme on sait, que, φ et ψ étant deux intégrales quelconques d'un système canonique, la fonction (φ, ψ) en est aussi une intégrale; mais la proposition réciproque n'a pas encore été démontrée. L'auteur établit les deux théorèmes, en les réunissant dans une seule démonstration.

FRITSCHÉ (H.). — *Sur les constantes géographiques de Péking.* (21 p., 1 pl.; all.)
