Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Revue des publications périodiques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 3 (1872), p. 258-265

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1872__3__258_1>

REVUE DES PUBLICATIONS PÉRIODIQUES.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK; herausgegeben von C.-W. BORCHARDT.

T. 74, 187.

REYE (Th.). — *Systèmes fondamentaux d'homographie et leurs produits.* (13 p.)

L'Auteur distingue quatre cas d'homographie (*Collinearität*) entre deux espaces Σ_1 et Σ_2 : 1° Σ_1 et Σ_2 sont homologues (*perspectivisch*); 2° les rayons correspondants communs forment un système de rayons de 1er ordre et de 1re classe; 3° les plans correspondants forment un faisceau de plans passant par une droite, tandis que les points correspondants communs forment une série de points situés dans une droite; 4° ils ont en commun, tout au plus, les faces, les arêtes et les sommets d'un tétraèdre. Pour tous ces cas, l'auteur démontre successivement le théorème suivant :

Étant donnés deux espaces homographiques Σ_1 *et* Σ_2, *il est possible de construire, d'une infinité de manières différentes, un troisième espace* Σ_3 *tel que, si l'on prend trois plans quelconques correspondants des trois espaces, chacun de ces plans passe par tous les points communs aux deux autres plans. De plus, faisant passer*

(1) Nous croyons que les premiers Ouvrages didactiques dans lesquels ce développement parallèle des propriétés de l'étendue a été employé pour la première fois sont la *Géométrie supérieure* et les *Sections coniques* de M. Chasles. Depuis, M. Hesse, dans ses *Vorlesungen aus der analytischen Geometrie des Raumes,* et M. Painvin, dans ses *Principes de la Géométrie analytique,* dont nous parlerons bientôt, ont suivi la même marche.

un plan arbitraire α_3 de Σ_3 par l'intersection de deux plans correspondants α_1 et α_2 de Σ_1 et Σ_2, l'affinité se trouve complétement définie. A tout couple de plans β_1, β_2 de Σ_1, Σ_2 il ne correspondra plus qu'un seul plan de Σ_3. Lorsqu'on fait tourner α_3 autour de la droite $\alpha_1\alpha_2$, le plan β_3 tournera autour de $\beta_1\beta_2$, et décrira un faisceau de plans homographique.

WEBER (H.) (de Zurich). — *Sur les sommes multiples de Gauss.* (44 p.)

WEBER (H.) (de Zurich). — *Sur les formes en nombre infini des fonctions ϑ.* (30 p.)

Les sommes de la forme $\sum_s e^{\frac{2\pi i}{n}cs^2}$, où c et n sont entiers et s parcourt un système complet de résidus suivant le module n, se présentèrent pour la première fois au génie de Gauss, lorsqu'il s'occupa de la division du cercle (*Disq. arithm.*, art. 356), et il les soumit à des recherches subtiles dans son Mémoire *Summativo serierum quarumdam singularium*, 1808. Dirichlet rattacha plus tard la théorie de ces sommes à celle des séries de Fourier. (Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie, herausgegeben von Dedekind.*) Jacobi en signala le premier [1] l'importance pour la détermination de la constante dans la théorie des formes en nombre infini de la fonction elliptique ϑ, détermination exécutée avec un si beau succès par M. Hermite (*Journal de Liouville*, 1858).

Cherchant à étendre les recherches à la théorie des fonctions ϑ de plusieurs variables, l'auteur des deux Mémoires cités fut porté à généraliser d'abord les sommes de Gauss. Il considère des sommes multiples de cette forme

$$\sum_{s_1, s_2, \ldots, s_p} e^{\frac{2\pi i}{n}\sum\limits_k \sum\limits_\lambda c_{k\lambda} s_k s_\lambda}, \tag{1}$$

où

$$\sum_k \sum_\lambda c_{k\lambda} s_k s_\lambda = c_{11} s_1^2 + 2c_{12} s_1 s_2 + \ldots + c_{pp} s_p^2,$$

c, n étant entiers; $s_1, s_2, \ldots, s_p$ parcourant séparément un système complet de résidus suivant le module n.

---

[1] *Journal de Crelle*, t. 36, trad. *Journal de Liouville*, t. XIV.

En posant alors

$$f(s_1, s_2, \ldots, s_p) = \frac{s_1(s_1\gamma_1^{(1)} + s_2\gamma_1^{(2)} + \ldots + s_p\gamma_1^{(p)})}{n_1} + \frac{s_2(s_1\gamma_2^{(1)} + s_2\gamma_2^{(2)} + \ldots + s_p\gamma_2^{(p)})}{n_2}$$
$$+ \ldots + \frac{s_p(s_1\gamma_p^{(1)} + s_2\gamma_p^{(2)} + \ldots + s_p\gamma_p^{(p)})}{n_p},$$

l'évaluation de la somme multiple (1) se réduit à la détermination de

$$\sum_{s_1, s_2, \ldots, s_p} e^{2\pi i f(s_1, s_2, \ldots, s_p)},$$

somme que l'Auteur désigne au besoin par

$$\varphi \left\{ \begin{matrix} \gamma_1^{(1)} & \gamma_1^{(2)} & \ldots & \gamma_1^{(p)} \\ \gamma_2^{(1)} & \gamma_2^{(2)} & \ldots & \gamma_2^{(p)} \\ \ldots & & \ldots & \\ \gamma_p^{(1)} & \gamma_p^{(2)} & \ldots & \gamma_p^{(p)} \end{matrix} \right\} (n_1, n_2, \ldots n_p) = \varphi\{\gamma\}(n_1, n_2, \ldots, n_p) = \varphi\{\gamma\}(n).$$

L'auteur réussit à montrer de quelle manière on parvient à déterminer, dans chaque cas proposé, la valeur de la somme $\varphi\{\gamma\}(n)$. Pour cela, il faut mettre à exécution un certain nombre d'opérations qui ne dépasse pas, pour chaque puissance d'un nombre premier p contenu dans $n_1, n_2, \ldots, n_p$, la valeur de ce nombre premier p.

L'expression définitive de φ se compose de puissances entières de i et de $1 + i (i = \sqrt{-1})$, et de racines carrées de nombres entiers. On ne peut pas s'étonner que l'auteur ait été obligé de distinguer un grand nombre de cas spéciaux : on sait que les sommes de Gauss demandent déjà cette distinction; on peut plûtôt s'étonner que le résultat se prête quelquefois à une simplicité et une élégance inattendues.

Renvoyant pour plus de détail le lecteur au Mémoire, nous nous bornerons à citer les titres des différents paragraphes, qui donneront une idée de la méthode employée par l'auteur.

§ I. Théorèmes généraux sur la fonction φ.

§ II. Réduction de la détermination de $\varphi\{\gamma\}(n)$ au cas où les nombres n sont des puissances d'un même nombre premier.

§ III. Détermination de $\varphi\{\gamma\}(q, q, \ldots, q)$, q étant un nombre premier impair.

§ IV. Détermination de $\varphi\{\gamma\}(q)$, D (déterminant des γ) étant divisible par q.

§ V. Détermination de $\varphi\{\gamma\}(n_1, n_2, \ldots, n_p)$, $n_1, n_2, \ldots, n_p$ étant des puissances, à exposants différents, d'un même nombre premier.

§ VI. Détermination de $\varphi\{\gamma\}(n, n, \ldots, n)$, n étant un nombre impair, D premier avec n.

§ VII. Détermination de $\varphi\{\gamma\}(q^{l_1}, q^{l_2}, \ldots, q^{l_p})$, D étant divisible par q.

§ VIII. Détermination de $\varphi\{\gamma\}(2^{l_1}, 2^{l_2}, \ldots, 2^{l_p})$.

§ IX. Procédé récurrent pour déterminer $\varphi\{\gamma\}(2^{l_1}, 2^{l_2}, \ldots, 2^{l_p})$ d'une manière générale.

§ X. Recherches sur une classe plus générale de sommes.

Ce dernier paragraphe du premier Mémoire est consacré à l'étude de sommes telles que

$$\sum_{s_1, s_2, \ldots, s_p} e^{\frac{\pi i}{n} f(s_1, s_2, \ldots, s_p) + (\nu_1 s_1 + \nu_2 s_2 + \ldots + \nu_p s_p)\pi i},$$

dont M. Le Besgue a considéré un cas spécial dans son Mémoire : « Sur le symbole $\left(\frac{a}{b}\right)$ et quelques-unes de ses applications » (*Journal de Liouville*, t. XII).

L'application des sommes considérées se fait dans le second Mémoire. L'auteur définit la fonction $\bar{\vartheta}$ par cette somme

$$\left(\sum_h\right)^p e^{\sum_1^p{}_k \sum_1^p{}_\lambda a_{k\lambda}\left(h_k + \frac{1}{2}\varepsilon_k\right)\left(h_\lambda + \frac{1}{2}\varepsilon_\lambda\right) + 2\sum_i \left(h_i + \frac{1}{2}\varepsilon_i\right)\left(u_i + \frac{1}{2}\varepsilon'_i \pi i\right)}.$$

Il introduit une autre fonction Π par l'équation

$$\Pi(w_1, w_2, \ldots, w_p) = e^{f(w_1, w_2, \ldots, w_p)} \vartheta(w_1, w_2, \ldots, w_p; b),$$

où

$$f(w_1, w_2, \ldots, w_p) = \sum_k \sum_\lambda c_{k\lambda} w_k w_\lambda.$$

Il faut résoudre le problème de trouver une substitution linéaire pour les variables w_h, telle qu'à l'aide d'un choix convenable des coefficients $c_{k\lambda}$ la fonction Π se transforme en une fonction ϑ. Cette transformation s'effectue alors comme pour la fonction elliptique ϑ

et mène à une équation $\Pi = F\vartheta$, où F est la constante qu'il faut déterminer. En employant une intégrale définie, l'Auteur réduit, par une intégration multiple de cette équation, la détermination proposée à une autre, de sommes multiples de Gauss; enfin il montre l'application de sa méthode au cas de deux variables. Les transformations employées par lui se fondent sur certains systèmes de nombres entiers, considérés déjà par MM. Kronecker, Clebsch et Gordan. Un dernier paragraphe de l'intéressant Mémoire est consacré à deux théorèmes relatifs à ces systèmes de nombres.

Gundelfinger (S.). — *Sur les formes binaires.* (5 p.)

Tous les covariants et invariants du système simultané de deux formes f et φ des degrés n et m ($m \gtreqless n$) peuvent être représentés, après avoir été multipliés par des puissances convenables de f, en fonctions entières et rationnelles de $m+n$ formes

$$f, \psi_1, \psi_2, \ldots, \psi\left(\frac{n}{1}\right), \quad \chi_1, \chi_2, \ldots, \chi\left(\frac{n-1}{1}\right), \quad (f, \varphi), (f, \varphi)^2, \ldots, (f, \varphi)^m.$$

Pasch (M.). — *Sur une propriété des courbes réciproques.* (6 p.)

Interprétation géométrique d'un facteur qui se présente dans le résultat d'une certaine méthode d'élimination pour les courbes réciproques.

Hesse (O.). — *Sur le problème des trois corps.* (19 p.)

En bornant le problème de deux corps à la recherche de la distance des deux corps, le célèbre géomètre a réussi à trouver pour ce problème l'une des deux intégrales inconnues jusqu'alors (Hesse, *Raumgeometrie,* 2. Aufl., Leipzig, 1869). Partant de ces considérations, il pose dans le présent Mémoire ce problème :

Déduire, des équations différentielles du problème des trois corps et de leurs intégrales connues, d'autres équations différentielles formées d'une manière symétrique, et dont chacune conduise à une intégrale inconnue jusqu'à présent.

L'auteur résume ses recherches à la fin du Mémoire dans ce théorème :

Si l'on borne le problème général des trois corps à la figure du triangle dont les trois corps marquent les sommets, la solution de *ce problème plus restreint dépend de trois équations différentielles du 3e ordre.*

Quand on suppose connus les principes de la Mécanique qui fournissent des intégrales, le problème peut être ramené à la solution de deux équations du 2e ordre et d'une autre du 3e. Ce Mémoire donne une nouvelle preuve de l'habileté avec laquelle l'auteur sait maintenir la symétrie du calcul, symétrie à laquelle renonça à contre-cœur Lagrange, son grand prédécesseur dans ce problème, qui le traita dans le Mémoire couronné en 1772. Le présent Mémoire a paru en même temps à Munich dans les *Mémoires de l'Académie.*

LIPSCHITZ (P.). — *Recherches sur un problème du calcul des variations où est compris le problème de la Mécanique.* (35 p.)

LIPSCHITZ (P.). — *Développement d'une relation entre les formes quadratiques de n différentielles et les fonctions abéliennes.* (22 p.)

Pour comprendre la portée de ces deux Mémoires, il faut recourir à d'autres publications du même auteur faites aux tomes 70, 71 et 72 du *Journal de Borchardt,* et qui concernent les fonctions entières et homogènes de n différentielles, en particulier celles du 2e degré. Le problème de transformer une forme donnée de n différentielles à coefficients variables en une autre, ou plutôt de reconnaître s'il est possible de la transformer en une autre forme donnée, a été suggéré par l'étude approfondie des *Recherches générales* de Gauss *sur les surfaces courbes,* et ce problème fut résolu en même temps par MM. Christoffel et Lipschitz.

Les spéculations sur la nature de l'espace prirent un nouvel élan, lorsque parut le Mémoire posthume de Riemann : *Sur les hypothèses qui servent de fondement à la Géométrie.* M. Lipschitz part, dans les Mémoires cités, des idées sur l'espace général de Gauss et de Riemann, en égalant l'élément linéaire à la $p^{\text{ième}}$ racine d'une forme quelconque, mais essentiellement positive, du degré p par rapport aux différentielles des coordonnées d'un point. Après avoir fixé les notions de la Mécanique pour cet espace, l'auteur considère, à l'aide du calcul des variations, une intégrale correspondant à la fonction caractéristique de Hamilton, et, au moyen d'une transformation des formes des différentielles, il parvient à établir une analogie complète entre ses recherches et celles de Gauss, de Hamilton, de Jacobi et de Kronecker.

N'oublions pas de remarquer avec l'auteur que, pour la Géométrie, M. Beltrami avait trouvé des résultats semblables dans un Mémoire publié en 1869. L'un des quatre théorèmes qui résument les études de M. Lipschitz a été précédemment publié par l'auteur sans démonstration ; ce théorème correspond exactement à un théorème de Gauss concernant les lignes géodésiques.

Si, dans le premier de ces Mémoires, l'auteur traite une question où se rencontrent la Géométrie, la Mécanique et le Calcul des variations, il soumet dans le second les formes quadratiques de n différentielles à une étude spéciale, pour faire voir le point où se touchent ses recherches et la théorie des transcendantes abéliennes. On sait que Jacobi a déjà donné une démonstration du théorème d'Abel dans ses Leçons sur la Dynamique.

Heine (E.). — *Les éléments de la théorie des fonctions.* (17 p.)

Celui qui a déjà professé la théorie des fonctions connaîtra sans doute les difficultés qui s'opposent au développement des théorèmes fondamentaux. Les découvertes modernes dans cette région du champ des Mathématiques demandent, dès le premier abord, une sobre exactitude qu'on ne trouve guère dans les Traités élémentaires. Dans son Cours sur la théorie des fonctions, M. Weierstrass, de Berlin, établit ces principes de la manière la plus satisfaisante ; mais il n'en a rien publié, et d'autres géomètres, qui ne connaissent pas sa méthode, ne veulent pas toujours accepter cette base inédite de son système. M. Heine, ami de M. Weierstrass, prend la peine de publier quelques-uns des théorèmes élémentaires. Remarquons que la *définition* des nombres par des séries infinies sert à éluder les difficultés qui font toujours les nombres irrationnels.

Le Mémoire se divise en deux parties :

A. — *Sur les nombres.*

§ I. Les séries des nombres.

§ II. Introduction de nombres plus généraux ou de signes numéraux.

§ III. Calcul avec les nombres généraux.

§ IV. Rapport des nombres généraux et des nombres rationnels.

B. — *Sur les fonctions.*

§ I. Fonctions en général.

§ II. Conditions de continuité.

§ III. Propriétés des fonctions continuelles.

Weyr (Em.). — *Détermination des couples d'éléments en involution par des systèmes uniformes des degrés m et n.* (4 p.)

Si deux systèmes élémentaires et uniformes des degrés m et n sont situés sur la même base (géométrique), ils ont $\frac{1}{2}[m(m-1)+n(n-1)]$ couples d'éléments en involution.