BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

CH. ANDRÉ

Sur la parallaxe du soleil déduite des observations méridiennes de Mars en 1862

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 89-96
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__89_1>

MÉLANGES.

SUR LA PARALLAXE DU SOLEIL DÉDUITE DES OBSERVATIONS MÉRIDIENNES DE MARS EN 1862;

PAR M. CH. ANDRÉ.

Au moment où, par suite du prochain passage de Vénus, l'attention des astronomes se trouve forcément reportée sur la discussion des différentes valeurs de la parallaxe du Soleil, il nous a paru opportun de rappeler un Mémoire remarquable publié dans les *Washington astronomical Observations for* 1865, et trop peu connu en France.

L'une des meilleures méthodes de détermination de la parallaxe du Soleil consiste dans la mesure de la parallaxe de Mars, mesure que l'on effectue en comparant, au moment de l'opposition et dans deux stations de latitudes fort différentes, les déclinaisons de Mars avec celles d'étoiles voisines. Cette méthode, proposée d'abord par M. Le Verrier, puis par M. Winnecke, a été mise en pratique, en 1862, d'après le plan suivant.

Dans un grand nombre d'Observatoires de l'un et de l'autre hémisphère, on a observé simultanément, au cercle méridien, la planète Mars, au moment de son opposition, et un certain nombre d'étoiles choisies préalablement.

En comparant chaque couple d'observations *correspondantes*, faites dans chacun des deux hémisphères, on aurait une valeur de la parallaxe de Mars et, par suite, de celle du Soleil; mais, en procédant ainsi, on perd un grand nombre d'observations qui, faites à l'une des deux stations, n'ont pas leurs correspondantes dans l'autre. Or il est un moyen de les faire concourir toutes à la détermination de la parallaxe, et, par suite, d'accroître, pour ainsi dire indéfiniment, l'exactitude du résultat.

1. Les perturbations du mouvement de la Terre et de Mars étant parfaitement connues pour l'époque des observations, chaque observation de la planète conduira, en réalité, à une équation de condition entre la parallaxe, les six éléments de l'orbite de la Terre et ceux de Mars. Treize observations, comparées à la théorie, suffiraient alors en toute rigueur pour corriger les éléments de celle-ci. Mais, si les observations ne comprennent qu'un court intervalle de temps, un mois par exemple, les coefficients de correction seront si faibles que l'on ne pourra accorder aucune confiance aux valeurs qui en seront déduites. En fait, nous dirons que nos équations suffisent seulement à déterminer un petit nombre de fonctions des éléments, et que, si le choix des valeurs de ces éléments n'a été déterminé que par les conditions de satisfaire aux fonctions précédentes, elles pourront varier beaucoup sans cesser de satisfaire à nos équations de condition.

L'une de ces fonctions est certainement l'erreur de la déclinaison de Mars ou, si l'on veut, l'erreur dz de la coordonnée rectiligne z, qui représente la distance absolue de la planète au plan de l'équateur terrestre. Cette erreur peut être développée en série suivant les puissances du temps, et les coefficients de ce développement remplacent les éléments eux-mêmes.

Nous avons donc

$$dz = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \ldots;$$

comme on a

$$z = \Delta \sin\delta,$$

Δ étant la distance de la planète à la Terre et δ sa déclinaison, il vient

$$dz = \Delta \cos\delta . d\delta,$$

et, par suite, on a, pour l'erreur tabulaire de la déclinaison,

$$d\delta = \frac{\text{séc}\,\delta}{\Delta}(\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \ldots).$$

Si l'on étudie la table des *erreurs tabulaires* données par Winnecke dans ses *Beobachtungen des Mars um die Zeit der Opposition,* 1862, on reconnaît non-seulement qu'une telle supposition est possible, mais, en outre, que le coefficient de t^2 ne surpasse jamais $0'',0004$; pour une période de dix jours, on pourra donc négliger ce terme sans s'exposer à commettre aucune erreur sensible.

D'autre part, l'expression de l'erreur tabulaire de déclinaison doit évidemment comprendre un terme constant provenant de toutes les erreurs constantes commises dans la mesure des déclinaisons; soit D_0 ce terme, $\delta\varpi$ la correction de la parallaxe et posons, en outre,

$$\Delta' = \Delta \cos\delta;$$

chaque comparaison d'une déclinaison observée et de la déclinaison calculée qui lui correspond, donnera une équation de la forme

$$d\delta = f\,\delta\varpi + D_0 + \frac{\alpha}{\Delta'} + \frac{\beta t}{\Delta'},$$

α et β, D_0 et $\delta\varpi$ étant des quantités inconnues à déterminer.

Tel est le principe de la méthode employée; nous devons faire connaître, maintenant, les observations qui ont servi de base au travail que nous analysons.

2. Les observations comprises dans la discussion actuelle sont les suivantes :

HÉMISPHÈRE NORD.

Poulkova. — *Beobachtungen des Mars von Dr. A. Winnecke;* 31 observations.

Helsingfors. — *Beobachtungen des Mars und der Winnecker'schen Vergleichsterne;* 18 observations.

Leiden. — *Astronomische Nachrichten,* t. LXII; 29 observations.

Greenwich. — *Greenwich Observations, of* 1862; 40 observations.

Albany. — *Washington Observations, of* 1863; 26 observations.

Washington. — *Washington Observations, of* 1862; 36 observations.

HÉMISPHÈRE SUD.

Williamstown. — 51 observations, par M. Robert Saint-Elbry.

Cap de Bonne-Espérance. — 43 observations, par M. Thomas Maclear.

Santiago. — *Observaciones meridianas y micrometricas relativas al planeta Marte al tiempo de su oposicion, en* 1862. *Verificandas en el Observatorio Nacional de Santiago de Chili*, 49 observations.

Pour l'hémisphère nord............	154
Pour l'hémisphère sud..............	143
Total..............	297

3. Quant à la discussion de ces observations, elle a été faite comme il suit : le point essentiel est de les rendre rigoureusement comparables entre elles ; on y arrive en les déduisant toutes séparément d'une position des étoiles de comparaison. Dans le plan de Winnecke, chaque observation de Mars est comparée aux observations analogues de huit étoiles de comparaison. Une éphéméride des positions de ces étoiles étant préparée, la comparaison de la distance polaire observée d'une étoile, avec celle que donne l'éphéméride, donne une correction apparente de cette observation. La moyenne des huit corrections, ainsi obtenues dans une nuit de travail, par un même observateur, est considérée comme la correction qu'il faut appliquer à la distance polaire de Mars observée le même soir.

Si chaque observateur observait chaque nuit les huit étoiles de comparaison, la position moyenne adoptée pour chaque étoile serait entièrement indifférente ; mais, fréquemment, on ne peut observer qu'une partie des étoiles de comparaison, il est donc nécessaire de diriger le calcul de réduction de telle sorte que la position moyenne obtenue pour chaque étoile soit indépendante du lieu particulier où elle a été observée. Le peu d'observations dont on dispose empêchant de les corriger toutes des erreurs particulières à chaque instrument et à chaque observatoire, on a déduit les positions adoptées des observations faites à Greenwich, Poulkova, Albany et Washington, en ayant soin de les rendre comparables entre elles au moyen des corrections données par Auwers, pour chacun de ces observatoires, dans son Mémoire *sur les corrections nécessaires pour réduire les différents catalogues à un catalogue fondamental.*

Quant aux distances polaires de Mars, elles ont été calculées d'après les tables de M. Le Verrier, en adoptant $8'',9$ pour parallaxe du Soleil.

Pour former les équations de condition, les observations ont été divisées en cinq séries de vingt à vingt-cinq jours de durée ; les deux premières comprennent les observations faites avec le groupe d'étoiles choisi par Winnecke; de plus, par une discussion attentive des observations, on a trouvé que, pour les ramener à la même erreur probable, on devait les multiplier par un facteur convenable, que j'appellerai la mesure de précision.

Ceci posé, soient

α l'erreur de la distance polaire nord au milieu de la série;

β la variation de α en dix jours, quantité supposée constante pendant la série;

π' le quotient par 0,89 de la correction de la parallaxe moyenne horizontale, équatoriale du Soleil;

la forme générale des équations de condition sera

$$o = \mathrm{K}\left(\alpha + \beta\frac{t}{10} + \frac{0{,}89 \sin z'}{\Delta}\pi' + d\mathfrak{P}\right),$$

où l'on a représenté par

K la mesure de la précision;

t l'époque exprimée en jours du milieu de chaque série;

z' la distance zénithale géocentrique apparente, comptée vers le sud;

Δ la distance de la planète à la Terre;

$d\mathfrak{P}$ la différence entre la distance polaire géocentrique nord calculée et la même quantité donnée par l'observation.

En appliquant cette équation générale à chacune des 297 observations dont on dispose, on forme cinq séries d'équations numériques, où les coefficients de l'inconnue principale π' sont de signes contraires pour chacun des deux hémisphères. On traite séparément chacune de ces séries par la méthode des moindres carrés, et l'on obtient, comme équations normales de chaque série,

$$1^{\circ}\quad\left\{\begin{aligned} o &= +311{,}0\alpha_1 - 11{,}5\beta_1 - 32{,}4\pi' + 48'',5,\\ o &= -11{,}5\alpha_1 + 145{,}8\beta_1 + 144{,}0\pi' + 14'',0,\\ o &= -32{,}4\alpha_1 + 114{,}0\beta_1 + 533{,}9\pi' + 41'',8;\end{aligned}\right.$$

$$2^{\circ}\quad\left\{\begin{aligned} o &= +308{,}0\alpha_2 + 6{,}2\beta_2 + 122{,}7\pi' + 2'',5,\\ o &= +6{,}2\alpha_2 + 41{,}1\beta_2 - 19{,}9\pi' - 1'',3,\\ o &= +122{,}7\alpha_2 - 19{,}9\beta_2 + 719{,}6\pi' - 25'',3;\end{aligned}\right.$$

$$3^\circ \left\{ \begin{array}{l} 0 = +237,0\,\alpha_3 + 4,8\,\beta_3 + 67,9\,\pi' + 3'',9, \\ 0 = +4,8\,\alpha_3 + 33,6\,\beta_3 - 12,4\,\pi' - 7'',1, \\ 0 = +67,9\,\alpha_3 - 12,4\,\beta_3 + 567,1\,\pi' + 13'',0; \end{array} \right.$$

$$4^\circ \left\{ \begin{array}{l} 0 = +192,0\,\alpha_4 - 23,8\,\beta_4 + 62,1\,\pi' + 44'',4, \\ 0 = -23,8\,\alpha_4 + 24,7\,\beta_4 - 11,0\,\pi' - 9'',7, \\ 0 = +62,1\,\alpha_4 - 11,0\,\beta_4 + 427,9\,\pi' + 38'',4; \end{array} \right.$$

$$5^\circ \left\{ \begin{array}{l} 0 = +264,0\,\alpha_5 + 23,5\,\beta_5 - 83,2\,\pi' + 75'',1, \\ 0 = +23,5\,\alpha_5 + 45,4\,\beta_5 + 26,4\,\pi' + 7'',5, \\ 0 = -83,2\,\alpha_5 + 26,4\,\beta_5 + 378,2\,\pi' + 38'',6. \end{array} \right.$$

La résolution de chaque système d'équations, pris isolément, donne, pour les inconnues, les valeurs

$$\begin{array}{llll} 1^\circ & \alpha_1 = -0'',167, & \beta_1 = -0'',053, & \pi' = -0'',077; \\ 2^\circ & \alpha_2 = -0'',020, & \beta_2 = +0'',024, & \pi' = +0'',039; \\ 3^\circ & \alpha_3 = -0'',016, & \beta_3 = +0'',210, & \pi' = -0'',016; \\ 4^\circ & \alpha_4 = -0'',188, & \beta_4 = +0'',187, & \pi' = -0'',057; \\ 5^\circ & \alpha_5 = -0'',354, & \beta_5 = +0'',119, & \pi' = -0'',188, \end{array}$$

qui, à proprement parler, ne doivent être considérées que comme des premières approximations. Pour obtenir une valeur plus exacte de π', nous procéderons par approximations succcessives. β est la variation que subirait la valeur de α en dix jours, si cette quantité variait uniformément. Or, comme nous avons maintenant une série de valeurs de α, pour des dates distantes de quinze à vingt jours, nous pourrions, si toutes ces valeurs étaient comparables, en déduire par différence les valeurs de β. En réalité, deux de ces valeurs seulement, les deux premières, sont rigoureusement comparables entre elles; mais, prises deux à deux, toutes les séries d'observations ont des étoiles communes; les différences probables des moyennes des huit étoiles sont donc si petites, qu'il paraît difficile qu'il en résulte des erreurs sur les valeurs de β déduites de leurs différences.

La comparaison des cinq valeurs successives de α donne pour β les nouvelles valeurs

$$+0'',09, \quad +0'',05, \quad -0'',05, \quad -0'',12, \quad -0'',12;$$

les nombres y croissent en sens inverse des valeurs déduites des équations, et, de plus, ils y ont des signes contraires. Un pareil résultat ne peut être attribué qu'à des erreurs accidentelles, et, au lieu de se servir de l'un ou de l'autre des deux systèmes de valeurs de β, il est préférable de déduire, de leur ensemble, les valeurs les plus probables de cette inconnue; elles sont

$$\beta_1 = +0'',04,\quad \beta_2 = +0'',04,\quad \beta_3 = 0'',00,\quad \beta_4 = -0'',03,\quad \beta_5 = -0'',03.$$

Une seconde approximation donne alors pour π'

$$\pi' = -0'',05.$$

Portant ces valeurs de β et de π' dans la première équation de chaque série, on aura de nouvelles valeurs de α, qui, combinées avec les valeurs précédentes de β et portées dans la dernière équation de chaque série donneront, pour π', et, par suite, pour π, les valeurs suivantes :

1°	$\pi' = -0'',096$,	$\pi = 8'',815$;
2°	$\pi' = +0'',034$,	$\pi = 8'',930$;
3°	$\pi' = -0'',023$,	$\pi = 8'',880$;
4°	$\pi' = -0'',059$,	$\pi = 8'',847$;
5°	$\pi' = +0'',175$,	$\pi = 8'',744$;
Moyenne....	$\pi' = -0'',050$,	$\pi = 8'',855$.

L'erreur probable de chaque équation est d'environ $0'',82$; l'erreur probable de la valeur conclue pour π' est donc approximativement de $0'',016$, et l'erreur probable de la quantité π est elle-même de $0'',014$.

Mais cette méthode suppose que les erreurs de toutes les équations séparées sont entièrement indépendantes, hypothèse qui revient à admettre que les observations faites à chaque observatoire ne sont point affectées d'erreurs particulières à l'observateur.

Cette hypothèse est peu probable; mais l'influence d'une pareille cause d'erreur est peut-être insensible. Pour s'en assurer, on a calculé, d'après les méthodes ordinaires, les résidus correspondants à chaque équation. Éliminant alors les équations qui correspondent à des observations où ces erreurs sont considérables, on a trouvé, pour la valeur de la parallaxe du Soleil, déduite des observations méridiennes de Mars à son opposition de 1862, le nombre

$$8'',855,$$

avec une erreur probable de

$$\pm 0'',020,$$

quantité qui n'est que le

$$\frac{1}{442}$$

de la valeur elle-même de la parallaxe.