Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 65-74

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__65_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

CLAUSIUS, professeur à l'Université de Bonn. — DE LA FONCTION POTENTIELLE ET DU POTENTIEL. Traduit de l'allemand par F. FOLIE, professeur à l'École industrielle de Liége. — Paris, Gauthier-Villars, imprimeur-libraire, 1870. Prix : 4 fr.

Cet Ouvrage est un traité didactique, qui peut servir d'introduction à la Physique mathématique, et principalement à la partie de cette science qui s'occupe de la distribution de l'électricité et du magnétisme.

Laplace a remarqué, le premier, que les composantes de l'attraction exercée par un corps m sur un point sont proportionnelles aux dérivées partielles de la fonction $V = \sum \frac{dm}{r}$, où r désigne la distance de l'élément de masse au point attiré; mais ce n'est pas seulement dans les problèmes relatifs à l'attraction des corps pondérables que cette fonction, ou une fonction analogue, joue un rôle important. On la retrouve dans toutes les questions où l'on a à considérer des forces naturelles, attractives ou répulsives, qui agissent en raison inverse du carré de la distance. L'étude des propriétés de cette fonction forme donc le préliminaire obligé d'un grand nombre de théories physiques. Poisson et Green en ont fait la base de leurs recherches sur l'électricité et le magnétisme. Plus tard, Gauss, reprenant la question à un point de vue analytique, aborda directement des difficultés que ses prédécesseurs avaient négligées. C'est la théorie de Gauss, étendue et simplifiée, que M. Clausius nous présente sous une forme élégante et rapide.

Les difficultés analytiques de cette théorie se rencontrent surtout dans le cas important où, l'agent étant distribué d'une manière quelconque dans un espace fermé ou sur une surface, le point qui subit l'action est situé dans l'intérieur de cet espace ou sur cette surface, dans le voisinage des limites. Il s'agit de savoir, dans ce cas où la distance r passe par zéro, et où l'homogénéité fait défaut, si la fonction V et ses dérivées partielles du premier et du second ordre conservent des valeurs finies et déterminées, et comment l'on pourra calculer ces valeurs. M. Clausius traite les différentes parties de ce problème par une méthode uniforme, avec une rigueur et une précision qui ne laissent rien à désirer.

M. Clausius distingue le potentiel de la fonction potentielle. Il conserve à la fonction $V = \sum \frac{dm}{r}$ ce dernier nom, que Green lui a donné; et il appelle *potentiel* d'un système sur un autre, ou d'un système sur lui-même, la somme des fonctions V qui déterminent toutes les actions d'un système sur les différents points d'un autre système, ou les actions mutuelles des différents points d'un même système. On voit que le potentiel se déduit de la fonction potentielle par une intégration. C'est le potentiel qui s'introduit, en Mécanique, dans les équations fondamentales que fournissent les principes des vitesses virtuelles, de d'Alembert, et des forces vives. Pour faire saisir exactement la raison de ce fait, M. Clausius expose, en peu de mots, ces principes généraux, sans chercher à les démontrer de nouveau, mais en s'attachant à en préciser le sens et la portée. On lira avec intérêt cette partie de l'Ouvrage, soit dans le texte original, soit dans l'élégante traduction de M. Folie.

Nous regrettons que le cadre, trop étroit, dans lequel l'éminent auteur a cru devoir se renfermer, ne lui ait pas permis de rappeler les beaux théorèmes sur les surfaces de niveau, que M. Chasles a fait connaître il y a plus de trente ans. Ces théorèmes, qui comprennent comme cas particulier l'attraction des ellipsoïdes, et qui s'appliquent si naturellement aux actions attractives ou répulsives des couches électriques, nous auraient paru tout à fait à leur place dans un traité comme celui-ci. On nous reproche, à nous Français, de négliger de parti pris les travaux qui s'exécutent au delà de nos frontières. La publication de ce *Bulletin* peut servir à prouver que ce reproche n'est pas toujours mérité; en tous cas, il doit nous être permis de signaler une omission si considérable dans un ouvrage, excellent d'ailleurs, et signé d'un nom qui n'est pas célèbre seulement en Allemagne.

Ch. S.

SCHLOEMILCH (Dr Oscar), königl. sächs. Hofrath, Professor an der Polytechnischen Schule zu Dresden. — UEBUNGSBUCH ZUM STUDIUM DER HÖHEREN ANALYSIS. — 2 Bde. 8; 1868-1870. Leipzig, Verlag von B.-G. Teubner. Pr. : 5 Thlr. 18 Ngr. (1).

Le premier volume de cet Ouvrage (264 p.), publié en 1868, con-

(1) SCHLÖMILCH (Dr O.), conseiller aulique du royaume de Saxe, professeur à l'École

tient des problèmes sur le Calcul différentiel. Après avoir donné, dans le premier Chapitre des exercices sur la différentiation des fonctions explicites d'une seule variable, l'Auteur traite, dans les deux Chapitres suivants, du calcul direct des différentielles d'ordres supérieurs des mêmes fonctions, et de la différentiation des équations entre deux ou plusieurs variables. Les Chapitres IV et V sont consacrés à la discussion et aux diverses propriétés des courbes planes, le Chapitre VI à la discussion des courbes à double courbure, et le Chapitre VII à celle des surfaces. Le Chapitre VIII contient des exercices sur les courbes et les surfaces enveloppes. Dans le Chapitre IX, il est question de la détermination des valeurs-limites des fonctions qui se présentent sous forme indéterminée, et, dans le Chapitre X, de la théorie des maxima et minima. Le Chapitre XI renferme les exercices relatifs à la théorie des séries, et, en particulier, aux séries de Taylor et de Maclaurin : représentation approximative des fonctions; résolution des équations transcendantes. Le Chapitre XII traite des fonctions et des séries de variables complexes, au point de vue élémentaire.

Le second volume (338 p.) est consacré aux exercices sur le Calcul intégral. Le premier Chapitre contient des exemples des diverses méthodes d'intégration des fonctions explicites. Les Chapitres II et III ont pour objet les applications géométriques de l'intégration simple : quadrature et rectification des courbes planes, cubature et complanation des surfaces cylindriques et de révolution, etc. Dans les Chapitres IV et V, l'Auteur traite des intégrales définies simples et des principales méthodes pour les calculer : intégrations indéfinies, transformations, différentiations et intégrations sous le signe $\int$; développement en séries et en produits infinis; sommation des séries par les intégrales définies. Les Chapitres VI et VII renferment des exercices sur les intégrales doubles et triples, et sur leurs applications géométriques et mécaniques. Le Chapitre VIII traite des valeurs moyennes des fonctions et de leur évaluation approximative. Les deux derniers Chapitres sont relatifs à l'intégration des équations différentielles : équation du premier ordre; applications aux problèmes des développantes, des trajectoires, des roulettes; équations différentielles

---

Polytechnique de Dresde. — *Recueil d'Exercices pour l'étude de l'Analyse supérieure.* — 2 vol. in-8°, 1868-1870. Leipzig, Teubner.

du second ordre, équations linéaires, équations homogènes, équations fonctionnelles.

On voit que le cadre de cet Ouvrage est le même que celui que l'Auteur a adopté dans le premier volume de son *Compendium der hoheren Analysis,* dont nous avons rendu compte ailleurs (¹). Il serait à désirer que M. Schlömilch donnât une suite à son *Recueil d'Exercices,* et qu'il y introduisît, outre les matières du second volume de son *Compendium,* les théories que nous regrettons de ne pas voir traitées dans ce livre, telles que celles des équations différentielles simultanées, des équations aux dérivées partielles, le calcul des variations, etc. Les deux volumes que nous possédons seront certainement d'un précieux secours dans l'enseignement supérieur des mathématiques, où le bon choix des exercices proposés aux étudiants est un élément de succès, parfois trop négligé. J. H.

KOSSAK (ERNST). — DAS ADDITIONSTHEOREM DER ULTRA-ELLIPTISCHEN FUNCTIONEN ERSTER ORDNUNG. — Berlin, Nicolai'sche Verlagsbuchhandlung, 1871 (²).

M. Rosenhain, dans son beau *Mémoire sur les fonctions de deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe* (*Mém. des Sav. étr.* t. XI), avait établi un théorème général relatif à l'addition des arguments pour les transcendantes hyperelliptiques de la première classe; un tableau, placé à la fin du Mémoire, réunit les formes diverses que ce théorème peut revêtir

En 1864, M. Kœnigsberger a donné les formules analogues pour les fonctions hyperelliptiques d'une classe quelconque (*Journal de Crelle,* t. 64); celles qui se rapportent à la première classe sont présentées d'une manière assez complète et sous une forme qui rappelle la formule fondamentale de la théorie des fonctions elliptiques,

$$\sin\operatorname{am}(u+v) = \frac{\sin\operatorname{am}u\cos\operatorname{am}v\,\Delta\operatorname{am}v + \sin\operatorname{am}v\cos\operatorname{am}u\,\Delta\operatorname{am}u}{1 - k^2\sin\operatorname{am}u\sin\operatorname{am}v}.$$

(¹) *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2ᵉ serie, t. IX, p. 385, 1870.

(²) KOSSAK (E.). *Le théorème d'addition des fonctions hyperelliptiques de la première classe.* Berlin, Nicolai, brochure in-4°.

M. Kossak, l'un des élèves distingués de M. Richelot, avait établi, à la même époque, plusieurs de ces formules dans une thèse d'agrégation, restée inédite, en faisant usage du tableau de M. Rosenhain. Dans le théorème qu'il vient de publier, les mêmes résultats sont déduits directement du théorème fondamental qui concerne les transcendantes de la première classe. M. Rosenhain définit la transcendante φ_{33} en posant

$$\varphi_{33}(v, w) = \sum_{-\infty}^{+\infty} m \sum_{-\infty}^{+\infty} n\, e^{m^2 \log p + n^2 \log q + 4mnA + 2mv + 2nw},$$

et il en déduit, à l'aide de certaines transformations, quinze autres transcendantes φ_{rs} (où il faut prendre pour r, s deux des nombres 0, 1, 2, 3). On a, notamment,

$$\varphi_{00}(v, w) = \varphi_{33}(v + \tfrac{1}{2}i\pi, w + \tfrac{1}{2}i\pi).$$

Les quinze rapports $\frac{\varphi_{rs}}{\varphi_{00}}$ constituent les fonctions hyperelliptiques de la première classe, auxquelles correspondent les fonctions elliptiques sin am, cos am, Δ am. Le théorème de M. Rosenhain a la forme suivante

$$P_{33} + P_{32} + P_{23} + P_{22} = P'_{33} + P'_{32} + P'_{23} + P'_{22},$$

où les P sont des produits de quatre facteurs

$$P_{33} = \varphi_{33}(v, w).\varphi_{33}(v', w').\varphi_{33}(v'', w'').\varphi_{33}(v''', w'''),$$

et les P′ des produits analogues dans lesquels les arguments v, v', v'', v''' et w, w', w'', w''' sont remplacés par les huit combinaisons $v \pm v' \pm v'' \pm v'''$ et $w \pm w' \pm w'' \pm w'''$. En attribuant à ces arguments des valeurs particulières pour lesquelles l'une ou l'autre des transcendantes φ s'évanouit, M. Kossak obtient les expressions des seize produits

$$\varphi_{rs}(y + y', z + z').\varphi_{00}(y - y', z - z')$$

par les transcendantes $\varphi_{rs}(y, z)$ et $\varphi_{rs}(y', z')$; en les divisant par le produit

$$\varphi_{00}(y + y', z + z').\varphi_{00}(y - y', z - z'),$$

on a les expressions des fonctions hyperelliptiques

$$\Phi_{rs}(y + y', z + z') = \frac{\varphi_{rs}(y + y', z + z')}{\varphi_{00}(y + y', z + z')}.$$

Afin d'abréger, nous écrirons avec l'auteur

$$
\begin{array}{lll}
rs \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{pour} & \varphi_{rs}(y, z), \\
rs_1 \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{pour} & \varphi_{rs}(y', z'), \\
rs_0 \ldots\ldots\ldots\ldots & \text{pour} & \varphi_{rs}(0, 0), \\
[rs] \ldots\ldots\ldots & \text{pour} & \varphi_{rs}(y + y', z + z'), \\
(rs) \ldots\ldots\ldots & \text{pour} & \varphi_{rs}(y - y', z - z').
\end{array}
$$

On trouve ainsi, par exemple,

$$
\begin{aligned}
00_0^2\,[00](00) &= 00^2.00_1^2 - 10^2.10_1^2 - 31^2.31_1^2 + 21^2.21_1^2 \\
&= 00^2.00_1^2 - 01^2.01_1^2 - 13^2.13_1^2 + 12^2.12_1^2.
\end{aligned}
$$

De même

$$
\begin{aligned}
33_0 . 00_0[33](00) &= 00 . 33 \;\; 00_1 . 33_1 + 10 . 23 . 10_1 . 23_1 \\
&\quad + 31 . 02 . 31_1 . 02_1 + 21 . 12 . 21_1 . 12_1 \\
&= 00 . 33 . 00_1 . 33_1 + 01 . 32 . 01_1 . 32_1 \\
&\quad + 13 . 20 . 13_1 . 20_1 + 12 . 21 . 12_1 . 21_1, \\
20_0 . 30_0[10](00) &= 00 . 10 . 20_1 . 30_1 - 01 . 11 . 21_1 . 31_1 \\
&\quad + 00_1 . 10_1 . 20 . 30 - 01_1 . 11_1 . 21 . 31, \\
02_0 . 03_0[01](00) &= 00 . 01 . 02_1 . 03_1 - 10 . 11 . 12_1 . 13_1 \\
&\quad + 00_1 . 01_1 . 02 . 03 - 10_1 . 11_1 . 12 . 13,
\end{aligned}
$$

et ainsi de suite. La division donne pour la fonction Φ_{10}, qui correspond au sin am,

$$
\begin{aligned}
&\Phi_{10}(y + y', z + z') \\
&\quad = \frac{\Phi_{10}\Phi'_{20}\Phi'_{30} - \Phi_{01}\Phi_{11}\Phi'_{21}\Phi'_{31} + \Phi'_{10}\Phi_{20}\Phi_{30} - \Phi'_{01}\Phi'_{11}\Phi_{21}\Phi_{31}}{\Phi^0_{20}\Phi^0_{30}(1 - \Phi^2_{10}\Phi'^2_{10} - \Phi^2_{31}\Phi'^2_{31} + \Phi^2_{21}\Phi'^2_{21})},
\end{aligned}
$$

où nous avons écrit

$$\Phi \text{ pour } \Phi(y, z), \quad \Phi' \text{ pour } \Phi(y', z'),$$

et

$$\Phi^0 \text{ pour } \Phi(0,0).$$

Si l'on ajoute d'abord $\frac{1}{2}i\pi$ à tous les arguments et que l'on fasse ensuite $y' = z' = 0$, les formules relatives aux produits $[rs](00)$ donnent encore une série d'équations telles que la suivante :

$$20_0 . 30_0 . 00 . 10 = 23_0 . 33_0 . 03 . 13 - 22_0 . 32_0 . 12 . 02.$$

Pour comparer les formules de M. Kossak à celles de M. Kœnigsberger, on a la correspondance des indices

Rosenhain. — Kossak.

33, 10, 20, 31, 32, 00, 23, 13, 02, 01, 30, 21, 22, 11, 12, 03.

Kœnigsberger.

0, 1, 2, 3, 4, 5, 01, 02, 03, 04, 12, 13, 14, 23, 24, 34.

On trouve alors que, parmi les expressions des seize produits $[rs](00)$ données par M. Kœnigsberger, dix seulement coïncident avec les expressions adoptées par M. Kossak; mais les tableaux de M. Rosenhain permettent de représenter chacun de ces produits de six manières différentes, et M. Kossak développe subsidiairement les six expressions de quelques-uns des produits $[rs](00)$, parmi lesquels se rencontrent alors les formes adoptées par lui et par M. Kœnigsberger.

M. Kossak s'occupe ensuite des dérivées partielles des fonctions Φ, prises par rapport aux arguments y et z. Il termine par l'indication des formules relatives à l'addition des arguments des intégrales de deuxième et de troisième espèce. R. R.

NICOLAIDÈS (N.), Docteur ès Sciences mathématiques de la Faculté de Paris. — ANALECTES ou *Série de Mémoires sur les diverses parties des Mathématiques.* — 1re et 2e livraison, in-8; Athènes, Imprimerie nationale, 1871. — Paris, Gauthier-Villars. Prix de chaque livraison : 80 cent.

Le titre de l'Ouvrage que nous annonçons indique que M. Nicolaïdès publiera d'une manière régulière les résultats de ses travaux si variés. Les deux premières livraisons contiennent plusieurs Mémoires dont nous donnons les titres :

Mémoire sur le mouvement d'un point matériel. (25 p.)
Sur la théorie des surfaces. (6 p.)
Note sur la théorie des nombres. (5 p.)
Sur le mouvement d'un point matériel. (15 p.)
Sur quelques articles des Nouvelles Annales de Mathématiques. (4 p.)

Dans le *Mémoire sur le mouvement d'un point matériel,* l'auteur se propose de généraliser le théorème des aires, et il obtient la proposition suivante : Toutes les fois qu'un point se meut dans l'espace, et que la force accélératrice est située dans un plan perpendiculaire au plan mené par la vitesse du mobile et le rayon vecteur, l'aire parcourue par ce rayon est proportionnelle au temps. G. D.

KLEIN ET LIE. — *Sur les lignes asymptotiques de la surface de Kummer du quatrième ordre à seize points singuliers* (1).

Nous avons déjà rendu compte (2) d'une théorie nouvelle dont Plücker, vers la fin de sa vie, a enrichi la science. Cet illustre géomètre, à qui la Géométrie analytique doit l'étude approfondie des coordonnées tangentielles et la première idée des coordonnées homogènes, était revenu aux études de Géométrie ; ses derniers travaux présentés à la Société Royale de Londres, et qu'il a réunis en un volume (3), paraissent devoir exercer une très-grande influence sur les progrès ultérieurs de la Géométrie. Plücker a eu l'heureuse idée de considérer la ligne droite comme un élément de l'espace ; il désigne et réunit sous le nom de *complexes* l'ensemble des lignes droites assujetties à une seule condition ; les lignes droites assujetties à deux conditions forment une *congruence ;* celles qui sont soumises à trois conditions, une *surface réglée*. Si l'on étudie toutes les droites d'un complexe, qui passent par un point de l'espace, on reconnaît que ces droites forment, en général, un cône dont l'ordre est appelé l'*ordre du complexe ;* au contraire, il ne passe par un point de l'espace ou il ne se trouve dans un plan qu'un nombre limité de droites appartenant à une congruence donnée.

La théorie des complexes du premier ordre coïncide avec une théorie due à M. Chasles, celle du déplacement d'un corps solide dans l'espace ; un des complexes du second ordre les plus importants, celui des normales aux surfaces homofocales du second ordre, avait aussi été étudié par M. Chasles dans l'*Aperçu historique ;* mais l'étude

---

(1) Extrait des *Comptes rendus mensuels de l'Académie des Sciences de Berlin*, 15 décembre 1870.

(2) Voir *Bulletin*, p. 73.

(3) PLUCKER, *Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement ;* Teubner, 1868-69.

des complexes généraux du second ordre est nouvelle, et elle vient de conduire MM. Klein et Lie à une conséquence extrêmement intéressante.

Soient, pour plus de simplicité,

$$x = az + p,$$
$$y = bz + q,$$

les équations d'une ligne droite. L'équation générale du second degré entre les cinq variables

$$a, \quad b, \quad p, \quad q, \quad aq - bp$$

représente le complexe du second ordre. Cette équation, étudiée par Plücker, contient 19 constantes. Toutes les droites situées dans un plan enveloppent une courbe de seconde classe; toutes celles qui passent par un point décrivent un cône du second degré.

Si l'on cherche le lieu des points de l'espace pour lesquels ce cône se décompose en deux plans, on obtient une surface remarquable du quatrième ordre, qui avait été rencontrée par M. Kummer dans ses belles études sur les systèmes de rayons rectilignes algébriques.

Cette surface est aussi l'enveloppe des plans, pour lesquels la conique du complexe se décompose en deux points.

Dans un Mémoire, inséré au tome II des *Mathematische Annalen* [2], M. Klein avait donné plusieurs propriétés importantes de la surface de Kummer. Dans le travail dont nous rendons compte, se trouve énoncé et démontré un résultat nouveau et très-important relatif à cette surface; ce résultat consiste dans l'intégration géométrique des lignes asymptotiques de la surface. Ce sont des lignes de la seizième classe et du seizième ordre dont toutes les singularités sont déterminées avec la plus grande élégance; ainsi elles ont 96 tangentes stationnaires, 16 points de rebroussement, 16 plans stationnaires, etc.

La surface de M. Kummer comprend, comme cas particulier, un très-grand nombre de surfaces remarquables, le *tétraédroïde* de M. Cayley, et par conséquent la surface des ondes de Fresnel, les surfaces du

---

(1) KUMMER, *Ueber die algebraischen Strahlensysteme, ins besondere, über die der ersten und zweiten Ordnung.* (*Mathematische Abhandlungen der Koniglichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, annee 1866.)

(2) KLEIN, *Zur Theorie der Complexen des ersten und zweiten Grades.* (*Math. Ann.* II, 2.)

quatrième ordre ayant une ligne double appelées *surfaces complexes* par Plücker, etc., etc. On voit donc combien est important le résultat trouvé par les jeunes géomètres de Gœttingue et de Christiania.

A la fin de la Note se trouve exposée une seconde méthode d'intégration indépendante de la théorie des complexes. Les auteurs, par une méthode de transformation qui fait correspondre aux points d'une droite toutes les génératrices rectilignes d'une sphère, obtiennent ce théorème important : Toutes les fois que l'on connaîtra les lignes de courbure d'une surface, on pourra obtenir les lignes asymptotiques d'une autre surface.

Dans cette méthode, à une surface de Kummer correspond une surface du quatrième ordre ayant le cercle de l'infini pour ligne double ; comme on connaît les lignes de courbure de cette dernière surface, on peut déterminer les lignes asymptotiques de la première.

Depuis, MM. Klein et Lie ont étendu les résultats précédents, et nous signalerons comme très-intéressantes deux Notes de M. Klein :

Sur un théorème de la théorie des complexes qui est analogue au théorème de M. Dupin sur les systèmes de surfaces orthogonales (1) ;

Sur la théorie de la surface de Kummer et sur les complexes du second degré (2) ;

Une Note de M. Lie (3) : *Sur la théorie des lignes de courbure étendue à un espace d'un nombre quelconque de dimensions.*

Dans ce travail M. Lie veut bien rappeler que nous avons publié sur ce sujet une Note (4) où nous considérons aussi un espace à n dimensions et où nous indiquons l'existence d'une série de surfaces algébriques, en nombre infini, dont on peut déterminer les lignes de courbure.

Enfin nous rappellerons la première Note publiée sur cet important sujet par M. Lie, qui a été imprimée dans les *Comptes rendus* (séance du 31 octobre 1870) (5).

G. D.

(1) *Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften und der G.-A. Universität zu Göttingen;* n° 3, 8 mars 1871.

(2) Même Recueil, n° 2, même année.

(3) Même Recueil, n° 7, 17 mai. Nous rendrons compte d'une manière plus détaillée de ces différents travaux en parlant des Mémoires contenus dans les *Nachrichten.*

(4) *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, août 1869.

(5) Voir *Bulletin*, t. I, p. 335 et 382.