BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

CH. SIMON

Note sur la formule de Gompertz et sur son application au calcul des probabilités de la vie humaine

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 282-288
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__282_1>

NOTE SUR LA FORMULE DE GOMPERTZ ET SUR SON APPLICATION AU CALCUL DES PROBABILITÉS DE LA VIE HUMAINE;

PAR M. CH. SIMON.

En Angleterre, les actuaires ou calculateurs des compagnies d'assurances sur la vie font un fréquent usage, depuis plusieurs années, d'une formule qui est due à Benjamin Gompertz (1), et qui a pour objet de représenter, au moyen de deux constantes seulement, la loi de la mortalité humaine telle qu'elle résulte de l'observation, du moins pour la classe de personnes qui participe habituellement aux assurances.

Gompertz y est parvenu par des considérations physiologiques qui nous paraissent singulièrement hasardées. Il suppose que chaque individu possède, à un âge donné, un certain pouvoir vital, ou un certain pouvoir de résister aux causes de mort (c'est, comme on voit, un commentaire assez inattendu d'un aphorisme célèbre de Bichat),

(1) *Philosophical Transactions*, 1825. *On the nature of the Function expressive of the law of human Mortality*. On peut lire à ce sujet, dans le t. IX du *Journal of the Institute of Actuaries* (1860-1861), une curieuse discussion de priorité entre M. Edmonds, qui réclame pour lui-même l'honneur de la découverte, ou tout au moins le mérite d'y être parvenu par une voie indépendante, et M. de Morgan (décédé en mars 1871), qui s'est fait le défenseur des droits de Gompertz. Nous ne connaissons pas assez les pièces du procès pour nous prononcer personnellement; mais l'opinion publique, en Angleterre, parait avoir donné gain de cause à M. de Morgan.

et que ce pouvoir diminue à chaque instant d'une quantité proportionnelle à sa valeur; de sorte que l'intensité de la mortalité, à l'âge t, peut être représentée par une expression de la forme Aq^t, A et q étant des constantes à déterminer par l'observation. En admettant ce point de départ, si l'on désigne par V le nombre des vivants, à l'âge t, d'une table donnée, on pourra poser

$$dV = -VAq^t dt;$$

puis, en intégrant,

$$V = Ce^{-\frac{A}{Lq}q^t}.$$

Si l'on fait $e^{-\frac{A}{Lq}} = G$, et si l'on détermine la constante C par la condition que V soit égal à un nombre donné V_0 pour $t = 0$, en laissant d'ailleurs arbitraire l'origine du temps ou l'âge initial de la table, on aura enfin

$$V = V_0 G^{(q^t - 1)}; \tag{1}$$

telle est la formule que nous voulions faire connaître. Au moyen de valeurs convenables de G et de q, elle représente assez fidèlement, dans des limites fort étendues, les diverses tables de mortalité employées en Angleterre pour les diverses catégories de têtes assurées. On peut donc l'accepter comme une formule empirique et approximative, sans attacher plus d'importance qu'il ne convient à la théorie sur laquelle son auteur a cru devoir l'appuyer. A ce titre, elle remplace avec avantage les anciennes formules de Moivre et de Lambert; elle paraît préférable à toutes celles qui ont été essayées depuis.

Toutefois, un même système de valeurs de G et de q ne peut pas servir à représenter une table entière, depuis la naissance jusqu'à la limite extrême de l'existence. Afin de déterminer les valeurs de ces constantes pour une table donnée, il convient de prendre pour V_0 le nombre des vivants de cette table à l'âge de dix ou de douze ans, et de compter le temps t à partir de cet âge, sans lui attribuer de valeurs négatives. On peut alors prendre dans la table les nombres V_n et V_{2n} correspondants à $t = n$ et à $t = 2n$, en faisant $n = 25$ ou 30, et l'on a

$$\left\{ \begin{aligned} \log V_n - \log V_0 &= (q^n - 1)\log G, \\ \log V_{2n} - \log V_0 &= (q^{2n} - 1)\log G. \end{aligned} \right. \tag{2}$$

En divisant ces deux équations membre à membre, on élimine G, et l'on a, pour calculer q,

$$q^n + 1 = \frac{\log V_{2n} - \log V_0}{\log V_n - \log V_0}.$$

On obtient ensuite G au moyen de l'une des deux équations (2). Or, les valeurs de G et de q varient d'une table à l'autre, c'est-à-dire avec les diverses catégories de têtes; mais q varie beaucoup moins que G, et la plupart des actuaires anglais regardent q comme indépendant de la catégorie de têtes que l'on considère. M. Makeham, qui a acquis une grande autorité en ces matières, adopte la valeur

$$q = 1,089023.$$

Cette valeur est plus grande que 1, comme on devait s'y attendre. Le coefficient G, au contraire, est nécessairement plus petit que 1; car la fonction V est constamment décroissante, et si l'on désigne par ω la limite extrême de la table, on doit avoir à très-peu près $G^{(q^\omega - 1)} = 0$.

Sans entrer dans une discussion de faits pour laquelle les documents nous manquent, nous supposerons, pour simplifier, qu'on ne considère que des têtes soumises à la même loi de mortalité, et nous nous bornerons à faire voir comment la formule (1), si on la regardait comme suffisamment établie, non par la théorie, mais par l'expérience, pourrait servir à résoudre les principales difficultés que soulève le calcul des probabilités de la vie humaine et des assurances sur la vie. Nous choisirons pour exemples la détermination de la vie moyenne ou de l'annuité viagère pour plusieurs têtes et le problème de survie, c'est-à-dire les questions dont toutes les autres dépendent. Les Anglais n'emploient guère la formule de Gompertz que pour corriger les tables de mortalité, en faisant disparaître les écarts fortuits que laissent subsister des observations trop peu nombreuses ou trop peu comparables; mais, si les tables sont corrigées d'après la formule, la formule peut remplacer les tables.

I. *Vie moyenne et annuité viagère.* — Considérons d'abord une seule tête A, actuellement âgée de a, l'âge étant compté à partir d'une origine arbitraire. Le nombre des vivants à l'âge a est, par la formule (1),

$$V_a = V_0 G^{(q^a - 1)};$$

et à l'âge $a+x$

$$V_{a+x} = V_0\, G^{(q^{a+x}-1)}.$$

Si l'on pose $G_a = G^{q^a}$, on aura

$$V_{a+x} = V_a\, G_a^{(q^x-1)};$$

et l'on voit que la probabilité $\frac{V_{a+x}}{V_a}$, pour une tête de l'âge a, d'atteindre l'âge $a+x$, est $G_a^{(q^x-1)}$. Il en résulte que si l'on désigne par W_a la vie moyenne de cette tête, par U_a la valeur actuelle d'une annuité viagère de 1 franc sur la même tête, et par r l'intérêt de 1 franc pour un an, on aura

$$W_a = \frac{1}{G_a}\int_0^{\omega - a} G_a^{q^x}\,dx = \frac{1}{G_a}\int_0^{\infty} G_a^{q^x}\,dx,$$

$$U_a = \frac{1}{G_a}\sum_1^{\omega-a} G_a^{q^x}(1+r)^{-x}.$$

Dans cette dernière expression, la somme Σ s'étend à toutes les valeurs entières de x, depuis 1 inclusivement jusqu'à la limite d'existence de la tête A, ou jusqu'à l'infini, car cela revient au même. On pourrait, si l'on voulait, transformer cette somme en intégrale, soit par la formule d'Euler, soit en substituant une annuité *continue* à l'annuité payable par termes équidistants. On aurait alors à calculer, pour les valeurs de a comprises entre 0 et ω, les tables de deux intégrales définies de la forme

$$\int_0^{\infty} G_a^{q^x}\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} G_a^{q^x} e^{-hx}\,dx,$$

où h est une constante positive qui dépend du taux de l'intérêt. Mais les tables ainsi construites n'offriraient aucun avantage sur les tables usuelles de la vie moyenne et de l'annuité viagère pour une tête. Quand il ne s'agit que d'une seule tête, la méthode usuelle est évidemment préférable à l'emploi d'une formule artificielle; il n'en est plus de même quand on considère simultanément plusieurs têtes. Pour deux têtes réunies, la méthode usuelle est déjà très-pénible; pour plus de deux têtes, elle conduit à des calculs tout à fait impraticables. La formule de Gompertz permettrait de ramener, dans tous les cas, les problèmes sur plusieurs têtes aux problèmes sur une seule tête.

En effet, soit un groupe de têtes A, B, C,... actuellement âgées de a, b, c,... années, tous les âges étant comptés à partir de la même origine; et soit

$$G_a = G^{q^a}, \quad G_b = G^{q^b}, \quad G_c = G^{q^c}, \ldots.$$

La probabilité que ce groupe subsistera au bout du temps x aura pour expression

$$\frac{V_{a+x}}{V_a}\,\frac{V_{b+x}}{V_b}\,\frac{V_{c+x}}{V_c} = (G_a\,G_b\,G_c)^{(q^x-1)}.$$

Considérons une tête M, dont l'âge m sera déterminé par la formule

$$(3) \qquad q^m = q^a + q^b + q^c + \ldots,$$

et soit $G_m = G^{q^m}$. La probabilité que cette tête M sera vivante au bout du temps x sera $G_m^{(q^x-1)}$; et, comme $G_m = (G_a\,G_b\,G_c)$, on voit que la tête M et le groupe ABC... ont, quel que soit x, la même probabilité de subsister au bout du temps x. De là résulte immédiatement :

1° Que la vie moyenne de la tête M est égale à la vie moyenne du groupe ABC....

2° Que la valeur actuelle d'une annuité viagère sur la tête M est égale à la valeur actuelle de la même annuité sur les têtes réunies A, B, C,....

Ainsi, le groupe ABC... pourra être remplacé par la tête unique M, dont l'âge sera calculé par la formule (3).

Nous avons supposé, pour plus de simplicité, que toutes les têtes considérées appartenaient à la même catégorie, ou que le coefficient G était le même pour toutes ces têtes; il est facile de voir comment il faudrait modifier le calcul de l'*âge moyen* m, si G variait d'une tête à l'autre, pourvu toutefois que l'exposant q restât constant.

II. *Problème de survie.* — Bornons-nous d'abord à considérer deux têtes A et B, âgées actuellement de a et de b années, et proposons-nous de calculer la probabilité P_{ab} que A meure avant B, ou bien la probabilité contraire P_{ba} que B meure avant A.

En conservant les notations précédentes, on aura

$$V_{a+x} = V_a G_a^{(q^x-1)};$$
$$V_{b+x} = V_b G_b^{(q^x-1)}.$$

La probabilité que A meure entre l'âge $a+x$ et l'âge $a+x+dx$ est

$$-\frac{dV_{a+x}}{V_a} = -\mathrm{L}G_a \,\mathrm{L}q\, G_a^{(q^x-1)} q^x dx.$$

La probabilité que la tête B soit vivante à cette époque est $G_b^{(q^x-1)}$. On conclut de là

$$P_{ab} = -\mathrm{L}G_a \,\mathrm{L}q \int_0^\infty (G_a G_b)^{(q^x-1)} q^x dx;$$

et, par suite, en observant que $(G_a G_b)^{(q^x-1)}$ est égal à zéro pour $x=\infty$, et à 1 pour $x = 0$,

$$P_{ab} = \frac{\mathrm{L}G_a}{\mathrm{L}G_a + \mathrm{L}G_b}.$$

La probabilité contraire a pour expression

$$P_{ba} = \frac{\mathrm{L}G_b}{\mathrm{L}G_a + \mathrm{L}G_b}.$$

Si le coefficient G, dont dépendent G_a et G_b, a la même valeur pour les deux têtes, ces formules deviennent

$$P_{ab} = \frac{q^a}{q^a + q^b} = \frac{q^{a-b}}{1 + q^{a-b}},$$
$$P_{ba} = \frac{q^b}{q^a + q^b} = \frac{1}{1 + q^{a-b}};$$

et l'on voit que, dans cette hypothèse, les probabilités P_{ab} et P_{ba} ne dépendent que de la différence $a - b$ des âges des deux têtes.

Soient maintenant trois têtes A, B, C, âgées actuellement de a, b, c années. On calculera d'abord les probabilités P_{bc}, P_{ac}, P_{ab}, relatives à ces têtes considérées deux à deux (ces trois fractions sont, d'ailleurs, liées entre elles par une relation évidente), et l'on en déduira les probabilités relatives aux trois têtes considérées simultanément. Si l'on veut avoir, par exemple, la probabilité P_{abc}, que ces trois têtes s'éteindront dans un ordre déterminé, A, B, C, on trouvera, par les méthodes ordinaires du calcul des probabilités,

$$P_{abc} = \frac{P_{ab} \times P_{ac} \times P_{bc}}{P_{ab} + P_{ac} - P_{ab} \times P_{ac}}.$$

La probabilité que la tête A s'éteindra la première, quel que soit l'ordre des décès des deux autres, serait

$$P_{abc} + P_{acb} = \frac{P_{ab} \times P_{ac}}{P_{ab} + P_{ac} - P_{ab} \times P_{ac}};$$

et la probabilité que la tête C s'éteindra la dernière aurait pour expression

$$P_{abc} + P_{bac} = P_{ac} \times P_{bc} \times \frac{1 - P_{ac} + 1 - P_{bc}}{1 - P_{ac} \times P_{bc}}.$$

Ces résultats s'étendraient facilement à un nombre quelconque de têtes, mais nous ne développerons pas davantage ce sujet. Nous avons voulu seulement appeler l'attention des lecteurs de ce *Bulletin* sur une formule, peu connue en France, qui pourrait donner lieu à beaucoup d'applications intéressantes, si elle était suffisamment contrôlée par l'observation [1].

---

(1) On lit dans les *Proceedings* de la Société Mathématique de Londres, t. I, séance annuelle : « The Society had lost two of its members by death namely : M. Benjamin Gompertz F. R. S., F. R. A. S., an eminent mathematician, and especially well known for the discovery of an important formula with respect to the law of mortality. »