BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

LAGUERRE

# Sur une propriété de l'hyperboloïde de révolution

*Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, tome 2 (1871), p. 279-282
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__279_1>

## MÉLANGES.

### SUR UNE PROPRIÉTÉ DE L'HYPERBOLOIDE DE REVOLUTION;

PAR M. LAGUERRE.

1. M. Bertrand a démontré depuis longtemps que les normales principales d'une ligne à double courbure donnée ne peuvent être

les normales principales d'une autre ligne à double courbure, à moins qu'il n'existe une relation linéaire entre les deux courbures de la courbe donnée.

Les courbes gauches, qui jouissent de cette remarquable propriété, se présentent d'elles-mêmes quand on étudie la déformation des surfaces gauches.

Considérons une surface gauche; il est commode dans un grand nombre de questions de déterminer chaque point de la surface par sa position sur la génératrice rectiligne qui le contient, cette génératrice étant elle-même déterminée par le point où elle rencontre la ligne de striction et les angles qu'elle fait avec cette ligne.

Les formules propres à ce système de coordonnées s'établissent immédiatement. Je transcrirai seulement les suivantes.

Appelons :

$\sigma$ la longueur de l'arc de la ligne de striction compris entre une origine arbitraire fixe et le point $m$, où la génératrice coupe cette ligne;

$\rho$ le rayon de courbure de la ligne de striction au point $m$;

$\tau$ son rayon de torsion en ce point;

$\omega$ l'angle que fait la génératrice considérée avec la tangente à la ligne de striction;

$\theta$ l'angle que fait la normale principale au point $m$ à la ligne de striction avec la droite menée perpendiculairement à la génératrice dans le plan tangent à la surface en ce point;

$d\mathrm{E}$ l'angle infiniment petit de deux génératrices consécutives.

Posons, en outre, pour abréger,

$$\frac{d\mathrm{E}}{d\sigma} = \frac{\sin\omega}{k}.$$

On a, entre ces diverses quantités, les deux relations suivantes :

$$\frac{d\omega}{d\sigma} + \frac{\sin\theta}{\rho} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{\tau} = \frac{d\theta}{d\sigma} + \frac{\cos\theta}{\tan g\,\omega}\,\frac{1}{\rho}. \tag{2}$$

2. Supposons maintenant que l'on déforme la surface de façon

que les génératrices rectilignes demeurent des droites; la surface donnée se transforme en une autre surface gauche dont la ligne de striction est la transformée de la ligne de striction de la surface primitive.

Les quantités $\sigma$, $\omega$ et $k$ conservent la même valeur pendant la déformation; les quantités variables $\theta$, $\tau$ et $\rho$ sont liées entre elles par les équations (1) et (2).

On peut se donner, par exemple, arbitrairement la valeur de $\theta$ en fonction de $\sigma$; on déduira alors des relations précédentes les valeurs de $\rho$ et $\tau$; la recherche de la nouvelle ligne de striction se ramènera à l'intégration d'équations aux différences ordinaires.

Si l'on élimine $\theta$ entre les équations (1) et (2), on obtient une équation différentielle entre $\rho$, $\tau$ et $\sigma$ à laquelle doit satisfaire la ligne de striction, quelle que soit la déformation de la surface.

3. Supposons, en particulier, que la surface donnée soit un hyperboloïde de révolution; dans ce cas $\omega$ et $k$ sont des quantités constantes dont la valeur détermine complétement la surface.

L'équation (1) donne alors

$$\frac{\sin\theta}{\rho} = 0.$$

Écartons le cas où l'on aurait $\rho = \infty$, et où, par conséquent, la ligne de striction serait une ligne droite; on déduit de là

$$\sin\theta = 0;$$

l'équation (1) devient alors

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{\tau} = \frac{1}{\operatorname{tang}\omega}\,\frac{1}{\rho}. \tag{3}$$

Les deux courbures de la ligne de striction sont ainsi liées par une relation linéaire, et l'on en déduit la proposition suivante :

*De quelque façon que l'on déforme un hyperboloïde de révolution, en conservant la rectitude des génératrices la courbe, en laquelle se transforme le cercle de gorge de l'hyperboloïde jouit de la propriété qu'en chacun de ses points il y existe une relation linéaire entre ses deux courbures.*

4. Réciproquement, étant donnée une courbe jouissant de cette propriété, on peut mettre la relation qui existe entre les deux courbures sous la forme (3); les constantes $\omega$ et $k$ déterminent un hyperboloïde; et l'on peut toujours déformer cet hyperboloïde de façon que son cercle de gorge se transforme en la courbe donnée.

La recherche des surfaces réglées développables sur un hyperboloïde de révolution est donc ramenée à la solution du problème suivant :

Trouver toutes les courbes gauches qui jouissent de la propriété signalée par M. Bertrand.