Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

V. Ermakof

Caractère de convergence des séries

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 250-256

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__250_0>

CARACTÈRE DE CONVERGENCE DES SÉRIES (¹);

PAR M. V. ERMAKOF.

(Traduit du russe par M. J. Hoüel.)

Ma Communication est relative au caractère général de convergence des séries *infinies, à termes de signe constant et décroissants,*

$$(1) \qquad f(0)+f(1)+f(2)+f(3)+\ldots.$$

Ma démonstration est fondée sur ce théorème connu, dû à Cauchy :

La série (1) est convergente, si l'intégrale définie

$$(2) \qquad \int_0^\infty f(x)dx$$

a une valeur finie, et divergente dans le cas contraire.

Supposons que $\varphi(x)$, pour x croissant à partir d'une limite constante quelconque, soit constamment positive, croisse à l'infini, et satisfasse à l'inégalité $\varphi(x) > x$. Nous appellerons une fonction ainsi déterminée une *fonction conjuguée de première espèce*. Comme exemples de fonctions assujetties à cette condition, on peut citer les fonctions

$$(3) \qquad x+1, \quad 2x, \quad x^3, \quad e^x, \ldots.$$

Nous allons démontrer maintenant ce théorème :

La série (1) sera convergente ou divergente, selon que le rapport

$$(4) \qquad \frac{\varphi'(x)f[\varphi(x)]}{f(x)},$$

pour x croissant jusqu'à l'infini, tendra vers une limite plus petite ou plus grande que l'unité.

Démontrons d'abord la première partie du théorème. Supposons que le rapport (4) tende vers une limite moindre que l'unité. Dans ce cas, on peut trouver une quantité $\alpha < 1$, telle que, pour toute va-

---

(¹) Communiqué dans la séance du $\frac{\text{23 août}}{\text{4 septembre}}$ 1871 du troisième Congrès des Naturalistes russes tenu à Kiev.

leur de x supérieure à un certain nombre n, on ait

$$\frac{\varphi'(x)f[\varphi(x)]}{f(x)} < \alpha.$$

On tire de là

$$\int_n^\infty \varphi'(x)f[\varphi(x)]dx < \alpha \int_n^\infty f(x)dx.$$

En posant $\varphi(n) = m$, on aura, d'après la propriété de la fonction $\varphi(x)$, $m > n$. En changeant, dans l'intégrale du premier membre, $\varphi(x)$ en z, il vient

$$\int_m^\infty f(z)dz < \alpha \int_n^\infty f(x)dx,$$

d'où l'on tire aisément

$$\int_n^\infty f(z)dz < \frac{1}{1-\alpha}\int_n^m f(x)dx.$$

Le second membre de la dernière inégalité est une quantité positive et finie; par conséquent, le premier membre, c'est-à-dire l'intégrale définie (2), sera aussi une quantité finie.

Démontrons maintenant la seconde partie du théorème. Supposons que la limite du rapport (4) soit plus grande que l'unité. La limite du rapport (4) peut être aussi égale à l'unité, si ce rapport arrive à l'unité par des valeurs décroissantes. Dans les deux cas, l'intégrale définie (2) sera infiniment grande. En effet, dans ces deux cas, pour toute grandeur de x supérieure à un certain nombre positif n, on aura

$$\frac{\varphi'(x)f[\varphi(x)]}{f(x)} > 1,$$

d'où l'on tire

$$\int_n^\infty \varphi'(x)f[\varphi(x)]dx > \int_n^\infty f(x)dx,$$

et, en changeant dans le premier membre $\varphi(x)$ en z,

$$\int_m^\infty f(z)dz > \int_n^\infty f(x)dx,$$

ou

$$\int_n^\infty f(z)dz > \int_n^\infty f(x)dx + \int_n^m f(x)dx.$$

La dernière inégalité n'est satisfaite pour aucune valeur finie de l'intégrale définie $\int_n^\infty f(x)\,dx$; par suite, l'intégrale définie (2) est infiniment grande.

Transformons maintenant de deux autres manières le caractère de convergence que nous venons d'obtenir. Posons

$$\varphi(x) = z,$$

d'où

$$x = \psi(z);$$

le rapport (4) deviendra

$$\frac{f(x)}{\psi'(z) f[\psi(z)]}. \tag{5}$$

La fonction $\psi(z)$ est positive, elle croît à l'infini, et satisfait à l'inégalité $\psi(z) < z$. Nous l'appellerons *fonction conjuguée de seconde espèce*. A toute fonction conjuguée de première espèce correspond une fonction réciproque conjuguée de seconde espèce. Aux fonctions (3) correspondent les fonctions conjuguées de seconde espèce

$$x - 1, \quad \tfrac{1}{2}x, \quad x^{\frac{1}{3}}, \quad \log x, \ldots$$

Soit, de plus, $\theta(x)$ une fonction conjuguée quelconque de première ou de seconde espèce. Posons

$$x = \theta(z) \quad \text{et} \quad \varphi[\theta(z)] = \Phi(z);$$

la fonction $\Phi(z)$ sera évidemment aussi une fonction conjuguée de première ou de seconde espèce. Le rapport (4) se changera dans le suivant,

$$\frac{\Phi'(z) f[\Phi(z)]}{\theta'(z) f[\theta(z)]}. \tag{6}$$

Ici les fonctions conjuguées $\Phi(z)$ et $\theta(z)$ satisfont à l'inégalité $\Phi(z) > \theta(z)$. Le théorème démontré plus haut peut s'exprimer comme il suit :

L'intégrale définie (2) *sera une quantité finie, si l'un des rapports* (4), (5), (6) *tend vers une limite moindre que l'unité, et une quantité infinie si l'un de ces rapports tend vers une limite plus grande que l'unité, ou tend vers l'unité, mais en convergeant vers cette limite par des valeurs décroissantes.*

Dans une dissertation pour le grade de magister, intitulée : « Convergence des séries infinies, d'après leur forme extérieure », le professeur Bougaïef, à Moscou, a donné une règle pour obtenir, au moyen du théorème des séries conjuguées, un nombre infini de caractères de convergence, qui s'expriment par le rapport de deux termes de la série, et sont renfermés dans la formule générale que nous avons démontrée,

$$\frac{\Phi'(z)f[\Phi(z)]}{\theta'(z)f[\theta(z)]} \lesseqgtr 1.$$

Prenons la première forme (4) du caractère de convergence obtenu, et cherchons à déterminer une fonction $\varphi(x)$ qui donne le caractère de convergence le plus simple et le plus sensible. Pour résoudre ce problème, nous nous servirons des deux théorèmes suivants :

Désignons par $\varphi^k(x)$ une fonction qui indique que l'opération représentée par le symbole φ doit être effectuée k fois sur la variable x. Nous allons maintenant démontrer ce théorème :

I. *Les fonctions $\varphi^k(x)$ et $\varphi(x)$ donnent une sensibilité identique pour les caractères de convergence et de divergence.*

Établissons ce théorème dans un cas particulier, pour $k=2$. Posons

$$\Phi(x)=\varphi[\varphi(x)].$$

En remplaçant, dans le premier facteur du second membre de l'identité

$$\frac{\Phi'(x)f[\Phi(x)]}{f(x)}=\frac{\varphi'[\varphi(x)]f\{\varphi[\varphi(x)]\}}{f[\varphi(x)]}\,\frac{\varphi'(x)f[\varphi(x)]}{f(x)},$$

$\varphi(x)$ par z, il vient

$$\frac{\Phi'(x)f[\Phi(x)]}{f(x)}=\frac{\varphi'(z)f[\varphi(z)]}{f(z)}\,\frac{\varphi'(x)f[\varphi(x)]}{f(x)},$$

d'où l'on tire, pour $x=\infty$, $z=\infty$,

$$\lim\frac{\Phi'(x)f[\Phi(x)]}{f(x)}=\left\{\lim\frac{\varphi'(x)f[\varphi(x)]}{f(x)}\right\}^2.$$

Cette équation fait voir que les limites des deux rapports

$$\frac{\Phi'(x)f[\Phi(x)]}{f(x)}, \quad \frac{\varphi'(x)f[\varphi(x)]}{f(x)}$$

sont simultanément supérieures, inférieures ou égales à l'unité, c'est-à-dire que les fonctions $\Phi(x)$ et $\varphi(x)$ donnent des caractères de convergence d'une égale sensibilité. On peut facilement étendre cette démonstration au cas général où k est un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif.

II. *De deux fonctions conjuguées de première espèce, la plus grande est celle qui donne le caractère le plus sensible de convergence ou de divergence.*

Soient $\Phi(x)$ et $\theta(x)$ deux fonctions conjuguées de première espèce, satisfaisant à l'inégalité $\Phi(x) > \theta(x)$. Si la série (1) est convergente, alors on a, d'après le théorème que nous avons démontré,

$$\lim \frac{\Phi'(x)f[\Phi(x)]}{\theta'(x)f[\theta(x)]} \leqq 1,$$

d'où

$$\lim \frac{\Phi'(x)f[\Phi(x)]}{f(x)} \leqq \lim \frac{\theta'(x)f[\theta(x)]}{f(x)}.$$

La dernière inégalité montre que $\Phi(x)$ donne un caractère de convergence plus sensible que $\theta(x)$.

Supposons maintenant que la série (1) soit divergente; alors

$$\lim \frac{\Phi'(x)f[\Phi(x)]}{\theta'(x)f[\theta(x)]} \geqq 1,$$

d'où

$$\lim \frac{\Phi'(x)f[\Phi(x)]}{f(x)} \geqq \lim \frac{\theta'(x)f[\theta(x)]}{f(x)}.$$

Par suite, $\Phi(x)$ donne encore un caractère de divergence d'une plus grande sensibilité.

Les deux théorèmes que nous venons de démontrer nous donnent le moyen de décider laquelle de deux fonctions conjuguées de première espèce donne le caractère de convergence le plus simple et le plus sensible. Prenons, par exemple, les deux fonctions e^x et x^x. Comme $\lim \frac{x^x}{x^x} = \infty$, alors, d'après le théorème II, x^x donnera un caractère plus sensible que e^x. En posant

$$\varphi(x) = e^x,$$

on a

$$\varphi^2(x) = \varphi[\varphi(x)] = e^{e^x}.$$

Comme $\lim \frac{e^{e^x}}{x^x} = \infty$, alors, d'après le théorème II, e^{e^x} donne un caractère plus sensible que x^x. Ces trois fonctions peuvent donc, sous le rapport du degré de sensibilité, être rangées dans l'ordre suivant,

$$e^x, \quad x^x, \quad e^{e^x}.$$

D'après le théorème I, la première et la dernière de ces fonctions donnent des caractères de la même sensibilité; donc les trois fonctions donnent des caractères également sensibles; mais, parmi ces fonctions, e^x est la plus simple.

En la comparant de la même manière à toute autre fonction connue, on arrivera toujours à cette conclusion que e^x donne le plus simple parmi les caractères de convergence les plus sensibles.

Démontrons actuellement qu'il n'y a pas de fonction conjuguée de première espèce qui donne un caractère de convergence de sensibilité maximum. Cela résulte de ce que, étant donnée une fonction $\varphi(x)$, on peut toujours trouver une autre fonction $\Phi(x)$ qui donne un caractère de convergence plus sensible. Comme fonction $\Phi(x)$ jouissant de cette propriété, on a la fonction

$$\Phi(x) = \varphi^x(x),$$

où l'opération indiquée par le symbole φ doit être répétée x fois sur la variable x. En effet, pour $x > 1$, $\varphi^x(x) > \varphi(x)$, d'où il suit, en vertu du théorème II, que $\varphi^x(x)$ donne un caractère de convergence plus sensible que $\varphi(x)$. Ici on ne peut pas établir que $\varphi^x(x)$ et $\varphi(x)$ donnent des caractères également sensibles; car le théorème I n'a plus lieu ici.

Pour revenir à la fonction e^x, son inverse est $\log x$. Cette fonction donne la règle suivante :

La série (1) *est convergente, si la limite de l'un des rapports*

$$(7) \qquad \frac{e^x f(e^x)}{f(x)}, \quad \frac{x f(x)}{f(\log x)}$$

est moindre que l'unité, et divergente si l'un de ces rapports tend vers une limite plus grande que l'unité, ou tend vers l'unité en passant par des valeurs décroissantes. Si l'un des rapports (7) *croît en tendant vers l'unité, la série* (1) *pourra bien être convergente ou divergente.*

On peut démontrer que ce caractère de convergence est plus sensible que tous les caractères connus jusqu'à présent; mais nous ne nous arrêterons pas à cettte démonstration.

Pour toutes les séries employées dans l'Analyse, les rapports (7) tendent vers zéro ou vers l'infini. En général, on ne peut trouver une fonction analytique $f(x)$, telle que les rapports (7) tendent vers une limite finie.