LAGUERRE

Application du principe du dernier multiplicateur à l'intégration d'une équation différentielle du second ordre

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 246-249

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__246_1>

MÉLANGES.

APPLICATION DU PRINCIPE DU DERNIER MULTIPLICATEUR A L'INTÉGRATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE DU SECOND ORDRE;

Par M. LAGUERRE.

1. Soient $f(x, y)$ et $\varphi(x, y)$ deux polynômes du second degré en x et en y, ne différant que par les termes du premier degré et la valeur de la constante.

Considérons le système d'équations différentielles

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{dy}{d\eta} = \frac{\sqrt{f(x, y)}}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}, \tag{1}$$

dont le nombre est inférieur de deux unités au nombre des variables.

En désignant par $F(x, y, z, u)$ une fonction du second degré, homogène et convenablement choisie, on peut poser

$$f(x, y) = F(x, y, a, b)$$

et

$$\varphi(\xi, \eta) = F(\xi, \eta, \alpha, \beta),$$

a, b, α et β étant des quantités constantes.

Cela posé, λ désignant une constante arbitraire, il est facile de voir que l'équation

$$\lambda = 2\sqrt{f(x, y)\varphi(\xi, \eta)} - \xi\frac{df}{dx} - \eta\frac{df}{dy} - \alpha\frac{df}{da} - \beta\frac{df}{db} \tag{2}$$

est une intégrale du système d'équations (1).

Il suffit, pour cela, de vérifier que la différentielle de l'expression précédente s'annule en vertu des seules relations (1).

Or on a

$$\begin{aligned}
d\lambda = {} & \frac{\sqrt{f(x, y)}}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}\left(\frac{d\varphi}{d\xi}d\xi + \frac{d\varphi}{d\eta}d\eta\right) \\
& + \frac{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}{\sqrt{f(x, y)}}\left(\frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy\right) - \frac{df}{dx}d\xi - \frac{df}{dy}d\eta \\
& - dx\left(\xi\frac{d^2f}{dx^2} + \eta\frac{d^2f}{dx\,dy} + \alpha\frac{d^2f}{da\,dx} + \beta\frac{d^2f}{db\,dx}\right) \\
& - dy\left(\xi\frac{d^2f}{dx\,dy} + \eta\frac{d^2f}{dy^2} + \alpha\frac{d^2f}{da\,dy} + \beta\frac{d^2f}{db\,dy}\right).
\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que, les polynômes $f(x, y)$ et $\varphi(\xi, \eta)$ étant respectivement égaux à $F(x, y, a, b)$ et à $F(\xi, \eta, \alpha, \beta)$ qui sont du second degré par rapport aux variables, on a les relations suivantes :

$$\frac{d^2f}{dx^2} = \frac{d^2\varphi}{d\xi^2}, \quad \frac{d^2f}{dx\,da} = \frac{d^2\varphi}{d\xi\,d\alpha}, \ldots;$$

d'où, en vertu d'un théorème connu sur les fonctions homogènes,

$$\xi\frac{d^2 f}{dx^2}+\eta\frac{d^2 f}{dx\,dy}+\alpha\frac{d^2 f}{dx\,da}+\beta\frac{d^2 f}{dx\,db}=\frac{d\varphi}{d\xi}$$

et

$$\xi\frac{d^2 f}{dx\,dy}+\eta\frac{d^2 f}{dy^2}+\alpha\frac{d^2 f}{dy\,da}+\beta\frac{d^2 f}{dy\,db}=\frac{d\varphi}{d\eta}.$$

La valeur de $d\lambda$ devient, par suite,

$$\begin{aligned}d\lambda=(\sqrt{\varphi}\,dx-\sqrt{f}\,d\xi)\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{df}{dx}-\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)\\+(\sqrt{\varphi}\,dy-\sqrt{f}\,d\eta)\left(\frac{1}{\sqrt{f}}\frac{df}{dy}-\frac{1}{\sqrt{\varphi}}\frac{d\varphi}{d\eta}\right),\end{aligned}$$

et elle s'annule évidemment en vertu des relations (1).

2. Soit l'équation du second ordre,

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{F\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x,y)}},\tag{3}$$

où F désigne une fonction quelconque de $\frac{dy}{dx}$.

Supposons que nous connaissions une intégrale particulière de l'équation

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2}=\frac{F\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}},\tag{4}$$

et soit

$$\eta=\theta(\xi)\tag{5}$$

cette intégrale; si l'on imagine les variables ξ et η liées par cette relation dans les équations (1), elles deviennent

$$\frac{dx}{d\xi}=\frac{dy}{\theta'(\xi)d\xi}=\frac{\sqrt{f(x,y)}}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}},$$

ou bien encore

$$\frac{dx}{\frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}}}=\frac{dy}{\frac{\theta'(\xi)}{\sqrt{\varphi(\xi,\eta)}}}=\frac{d\xi}{\frac{1}{\sqrt{f(x,y)}}}.\tag{6}$$

On peut aussi éliminer ξ entre les équations précédentes; on a

$$\frac{dy}{dx} = \theta'(\xi),$$

d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\theta''(\xi)\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}{\sqrt{f(x, y)}};$$

comme $\eta = \theta(\xi)$ est une solution particulière de l'équation (4), on a

$$\theta''(\xi)\sqrt{\varphi(\xi, \eta)} = \mathrm{F}\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right) = \mathrm{F}\left(\frac{dy}{dx}\right);$$

l'équation du second ordre entre x et y est donc

$$(3) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathrm{F}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\sqrt{f(x, y)}}.$$

3. D'après ce que j'ai dit plus haut, l'équation (2), si l'on y fait $\eta = \theta(\xi)$, est une intégrale du système d'équations du premier ordre (6).

On peut immédiatement appliquer à ces équations le principe du dernier multiplicateur de Jacobi [1], car on a évidemment

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{\theta'(\xi)}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}}\right) + \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\sqrt{f(x, y)}}\right) = 0;$$

on a donc pour deuxième intégrale

$$\int \left(\frac{d\xi}{d\lambda}\right) \frac{\theta'(\xi)\,dx - dy}{\sqrt{\varphi(\xi, \eta)}} = \text{const.};$$

et cette dernière équation sera l'intégrale, avec deux constantes arbitraires, de l'équation (3), ξ étant exprimé, en vertu des équations (2) et (5), en fonction de λ, x et y.

---

[1] JACOBI, *Theoria nova multiplicatoris*, etc (*Journal de Crelle*, t. 27, p 256)