Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 225-231
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__225_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

RIEMANN (B.). — PARTIELLE DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND DEREN ANWENDUNG AUF PHYSIKALISCHE FRAGEN ; Vorlesungen von BERNHARD RIEMANN ; für den Druck bearbeitet und herausgegeben von K. HATTENDORFF. — Braunschweig ; Druck und Verlag von Friedrich Vieweg & Sohn ; 1869 (¹).

Voici un Livre utile, et dont l'équivalent n'existe pas en français. Nous avons sans doute d'excellents ouvrages sur les diverses parties de la Physique mathématique, qui dépendent des équations aux différentielles partielles ; nous n'en avons pas où ces diverses parties se trouvent systématiquement coordonnées, et présentées sous un même point de vue, de manière à former un corps de doctrine. Celui que M. Hattendorff offre au public est le résumé des leçons professées par Riemann, à l'Université de Gœttingue, pendant les hivers de 1854-55 et de 1860-61, et pendant l'été de 1862. L'éminent géomètre avait l'intention de rédiger lui-même son cours ; mais, enlevé par une mort prématurée, il n'a laissé que des fragments détachés, et même, sur beaucoup de points, de simples notes, destinées à servir de texte à un développement oral, et non préparées pour l'impression. M. Hattendorff, un de ses auditeurs les plus distingués, a recueilli pieusement les manuscrits de son maître, et, en les complétant par ses souvenirs personnels, il en a composé un tout homogène, sans soudures apparentes.

L'ouvrage se divise en six Parties :

Les deux premières constituent une sorte d'introduction au sujet principal. Elles comprennent : 1° la théorie des intégrales définies, et la détermination de celles de ces intégrales qui se rencontrent le plus fréquemment dans la Physique mathématique ; 2° le développement des fonctions en séries trigonométriques, et la célèbre formule de Fourier.

La troisième Partie traite de l'intégration des équations linéaires

(¹) *Leçons de B. Riemann sur les équations aux différentielles partielles et sur leur application aux problèmes de physique*, publiées par K. HATTENDORFF. Brunswick, chez Fr. Vieweg et fils ; 1869. In-8° ; 315 p.

à une seule variable indépendante, et de celle des équations aux différentielles partielles du second ordre. L'auteur considère spécialement les deux équations fondamentales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

qui se rencontrent dans la théorie de la chaleur et dans celle des cordes vibrantes.

La quatrième Partie est consacrée au mouvement de la chaleur dans les corps solides. Après avoir établi, à peu près comme Fourier, l'équation générale du problème, l'auteur développe avec beaucoup de soin, sur de nombreux exemples, la manière d'avoir égard aux conditions initiales et aux conditions limites; il aborde ensuite la question de la température de la Terre, et le cas général d'une sphère primitivement échauffée d'une manière quelconque. Toute cette exposition est d'une netteté parfaite, et témoigne que Riemann joignait à l'esprit inventif du géomètre le talent du professeur. Nous regrettons toutefois qu'il n'ait pas cru devoir étendre son analyse à la propagation de la chaleur dans les corps cristallisés, et qu'il ait entièrement négligé les belles recherches de M. Duhamel, dont les expériences de Sénarmont ont encore accru l'intérêt. Nous ignorons aussi pourquoi il n'a pas jugé à propos de faire connaître à ses auditeurs ou à ses lecteurs, au moins sommairement, la théorie des surfaces isothermes du second degré, qui a fourni à Lamé la matière d'un livre si original.

Les vibrations des corps élastiques sont l'objet de la cinquième Partie. L'auteur débute, avec raison, par l'étude des vibrations des cordes, et il retrace en quelques pages l'histoire de ce fameux problème, qui a été l'origine des travaux des géomètres sur les équations aux différentielles partielles. Pour les idées fondamentales, mais seulement pour celles-là, l'ordre historique est celui qui convient à l'enseignement. Après ce préliminaire en quelque sorte obligé, l'auteur établit les équations générales de l'élasticité, par la considération du parallélépipède et du tétraèdre élémentaire. En suivant une marche plus rapide que Lamé, il parvient aux mêmes résultats, qui d'ailleurs avaient déjà été indiqués par Cauchy. Ainsi, dans le cas des corps d'élasticité constante, il exprime les trois composantes normales et les trois composantes tangentielles des forces élastiques au moyen de deux coefficients λ et μ, qui restent à déterminer par l'expérience, et non au moyen d'un seul coefficient, comme le voulait Poisson. Quand un prisme droit est soumis à une traction normale à ses bases, les coefficients de sa dilatation cubique et de sa dilatation linéaire ont respectivement pour expressions

$$\frac{1}{3\lambda + 2\mu} \quad \text{et} \quad \frac{1 + \frac{\lambda}{\mu}}{3\lambda + 2\mu}.$$

Selon Poisson, qui suppose implicitement la continuité de la matière, on aurait $\lambda = \mu$; le coefficient de dilatation cubique serait la moitié du coefficient de dilatation linéaire, et ce résultat du calcul avait paru confirmé par une expérience bien connue de Cagniard-Latour. Mais cette expérience, qui est sujette à de nombreuses causes d'erreur, mérite peu de confiance. Des expériences plus récentes de Wertheim ont fourni pour le second coefficient une valeur triple de celle du premier; ce qui donnerait $\lambda = 2\mu$. Mais si le rapport $\frac{\lambda}{\mu}$ était exactement égal à un nombre entier tel que 2, ce serait un théorème de la plus haute importance, dont il faudrait chercher la raison mathématique dans une hypothèse plausible sur la constitution de la matière, ou sur la loi des forces moléculaires. Il est probable que ce rapport est un nombre incommensurable, voisin de 2; en tous cas c'est un point qui reste à examiner, et que Riemann ne discute pas. En laissant ce rapport indéterminé, Riemann se borne à traiter les problèmes très-simples de la traction et de la torsion d'un cylindre, et les vibrations d'une membrane tendue, rectangulaire ou circulaire. Ici encore il a peut-être un peu trop limité son programme, en se préoccupant exclusivement des corps dont l'élasticité est la même dans toutes les directions. Il ne donne pas même l'équation de l'ellipsoïde de Fresnel. Or l'état cristallin est réellement l'état normal des corps solides; l'ellipsoïde inverse des racines carrées des forces élastiques joue, dans la mécanique *intérieure* des corps, un rôle au moins aussi important que l'ellipsoïde des moments d'inertie dans ce que l'on peut appeler par opposition la mécanique *extérieure;* et quoique l'Optique, dans son ensemble, ne puisse pas encore prendre rang parmi les branches de la Physique mathématique, il nous est difficile de comprendre que, dans un cours de Physique mathématique, la théorie de la double réfraction doive être entièrement passée sous silence.

Enfin, la sixième et dernière Partie est consacrée au mouvement des fluides. L'auteur établit les équations générales de l'Hydrodynamique; il en déduit les lois de la propagation des vibrations dans un milieu compressible, c'est-à-dire les lois de la propagation des ondes sonores; il termine par l'étude du mouvement d'un corps solide, et particulièrement d'une sphère, dans un fluide incompressible et indéfini, problème résolu pour la première fois par Dirichlet.

On voit par cette courte analyse que l'ouvrage publié par M. Hattendorff peut être considéré comme un traité élémentaire de Physique mathématique. Rédigé avec clarté et précision, il sera extrêmement utile aux jeunes géomètres, en les introduisant de plain-pied dans un domaine d'un accès difficile, et, pour cette unique raison, trop peu fréquenté. Malheureusement l'auteur ne conduit pas ses lecteurs assez loin; il les abandonne avant de leur avoir ouvert toutes les routes et donné toutes les clefs. Riemann, s'il eût vécu, aurait sans doute complété son Cours; mais ce Cours, tel que nous l'avons sous les yeux, nous laisse regretter l'absence de plusieurs notions essentielles, qui ont acquis droit de cité dans la science depuis l'époque de Poisson, et qui, jointes aux données récentes de la Physique expérimentale, doivent servir de point de départ pour toutes les recherches ultérieures.

CH. S.

MEYER (G.-F.). — VORLESUNGEN ÜBER DIE THEORIE DER BESTIMMTEN INTEGRALE ZWISCHEN REELLEN GRENZEN, mit vorzüglicher Berücksichtigung der von P.-G. LEJEUNE-DIRICHLET im Sommer 1858 gehaltenen Vorträge über bestimmte Integrale. — Leipzig, B.-G. Teubner, 1871; in-8°, XVIII-628 p. — Prix : 4 Thlr (1).

Le titre que nous venons de transcrire indique d'une manière précise le but et le plan de M. Meyer. C'est un traité des intégrales définies prises entre des limites réelles, traité dans lequel l'auteur a mis en œuvre tous les matériaux que pouvaient lui fournir non-

(1) MEYER, *Leçons sur la théorie des intégrales définies prises entre des limites réelles, d'après les leçons professées par* P.-G. Lejeune-Dirichlet *pendant l'été de* 1858.

seulement les leçons, mais encore les Mémoires de l'illustre successeur de Gauss dans la chaire de l'Université de Göttingue.

On voit que l'on n'est pas en présence d'une œuvre originale de Dirichlet, ni même d'une reproduction pure et simple de ses leçons à l'Université; M. Meyer, en disciple fidèle, a utilisé toutes les productions du maître se rapportant à son sujet; il y a même ajouté des développements qui lui appartiennent et qui sont brièvement signalés dans la préface du livre.

Une analyse rapide des matières traitées par l'auteur indiquera d'une manière précise ce que le lecteur trouvera dans le livre si étendu et si consciencieusement travaillé de M. Meyer.

L'Ouvrage se divise en deux Livres :

Le premier traite des intégrales définies simples.

La première section est consacrée aux principes. Quelques-unes des questions examinées dans cette partie et, en particulier, la définition par l'analyse pure d'une intégrale définie, ne nous ont pas paru traitées avec les développements qu'exige un livre destiné à des élèves. Signalons une formule remarquable, identique à celle de M. Bourget [1], qui donne toutes les formes connues du reste de la série de Taylor.

La deuxième section du premier Livre est consacrée à des intégrales définies particulières. On y remarque surtout une étude très-complète des intégrales eulériennes. L'auteur étudie d'abord les fonctions $B(a, b)$, qu'il représente par un produit infini; mais il laisse de côté les développements en produits infinis des intégrales eulériennes pour s'attacher plus spécialement aux démonstrations tirées du calcul intégral. Un paragraphe curieux est consacré à l'étude de la condition sous laquelle $\lim \left(1 - \frac{z}{m}\right)^m$ est égale à e^{-z}, m et z augmentant tous les deux. Par une méthode très-ingénieuse, il est établi que toutes les fois que z croît moins rapidement que $\sqrt{m}$, on a

$$\left(1 - \frac{z}{m}\right)^m = e^{-z}(1 + \varepsilon),$$

ε tendant vers o quand m augmente indéfiniment. Ce résultat et

---

[1] Voir *Bulletin*, t. II, p. 81.

quelques autres qui s'y rattachent est appliqué à la détermination de l'intégrale

$$\int_0^m z^{b-1}\left(1-\frac{z}{m}\right)^m dz,$$

lorsque m augmente de manière à dépasser toute limite.

Indiquons encore la démonstration donnée par Dirichlet [1] de la formule de Gauss

$$\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(a+\frac{n-1}{n}\right)=\Gamma(na).n^{-an+\frac{1}{2}}(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Un chapitre spécial est consacré au développement de $\log\Gamma(a)$ en série et se termine par la démonstration de la formule de Raabe

$$\int_0^1 l\Gamma(x+k+1)dx=\frac{1}{2}\log 2\pi+(k+1)\log(k+1)-(k+1).$$

Un chapitre étendu est aussi consacré au développement des fonctions en séries trigonométriques et à la méthode si rigoureuse que Dirichlet a développée pour la première fois dans le *Journal de Crelle*. Ces études générales et étendues peuvent être plus facilement signalées qu'une foule de formules élégantes dues à Gauss, Cauchy, Euler, Laplace; à MM. Kummer, Liouville, Serret, etc., etc. L'auteur ne pouvait d'ailleurs oublier les belles méthodes de Dirichlet pour l'évaluation des sommes de Gauss,

$$\sum_1^{n-1}\cos\frac{2s^2\pi}{n},\quad \sum_1^{n-1}\sin\frac{2s^2\pi}{n},$$

et l'application de ces formules à la démonstration de la loi de réciprocité dans la théorie des résidus quadratiques.

Enfin, la section consacrée aux intégrales simples se termine par l'étude du développement des fonctions de deux angles au moyen des fonctions Y_n de Laplace, que quelques auteurs français appellent, à l'exemple des Allemands, les *fonctions sphériques*.

Le second Livre est consacré aux intégrales multiples. Signalons

---

(1) *Journal de Crelle*, t. 15.

le calcul de la surface de l'ellipsoïde par la méthode de M. Catalan, l'attraction des ellipsoïdes, les théorèmes de Maclaurin et d'Ivory et différentes formules dues à Cauchy, à MM. Winckler, Schlömilch, Liouville, Catalan, pour la réduction des intégrales multiples et leur transformation en intégrales simples.

En résumé, l'Ouvrage de M. Meyer nous paraît contenir un recueil précieux de formules bien enchaînées et relatives aux intégrales définies. Nous regrettons seulement que le cadre adopté par l'auteur ne lui ait pas permis d'employer la théorie des variables complexes due à Cauchy, et qui permet de rattacher à un principe uniforme la détermination de presque toutes les intégrales définies connues.

G. D.