BULLETIN DES SCIENCES
MATHÉMATIQUES ET ASTRONOMIQUES

G. DARBOUX

Sur une méthode nouvelle pour l'étude des courbes tracées sur les surfaces algébriques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 221-224
<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__221_1>

© Gauthier-Villars, 1871, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR UNE MÉTHODE NOUVELLE POUR L'ÉTUDE DES COURBES TRACÉES SUR LES SURFACES ALGÉBRIQUES (1).

Avant de parler des recherches nombreuses qu'ont suscitées sur le sujet dont nous nous occupons (représentation des surfaces sur un plan) les beaux travaux de MM. Chasles, Clebsch, Cremona, nous devons parler de l'extension toute récente et très-importante que M. Clebsch a donnée à ses méthodes, en ce qui concerne la représentation d'une surface, sur un plan. Pour faire comprendre les principes nouveaux que nous avons à développer, il est nécessaire d'insister sur la remarque suivante, qui fera bien comprendre le caractère des nouvelles études publiées par l'éminent géomètre de Göttingue.

Si nos lecteurs veulent bien se reporter aux deux articles qui précèdent, ils verront que, alors même que la représentation sur un plan est possible, cette représentation, pour être effectuée, suppose qu'on ait résolu d'abord un certain nombre d'équations algébriques. C'est ainsi que la représentation d'une surface du troisième ordre ne peut être développée que si l'on connaît deux droites de la surface ne se coupant pas, et, par suite, la détermination de tous les modes de représentation exige la résolution préalable de l'équation aux 27 droites de la surface. Pour la surface du quatrième ordre ayant une conique double, il faut commencer par trouver les 16 droites de la surface, problème qui se ramène à la résolution d'une équation du cinquième ordre et à celle de plusieurs équations quadratiques. Pour la surface du quatrième ordre ayant une droite double sans autre singularité, on a à déterminer 64 coniques isolées de la surface, indépendantes de la série de coniques dont les plans passent par la

(1) Voir *Bulletin*, t. II, p. 23.

droite double, et nous avons vu que ce problème se ramène à la résolution d'une équation du 8^e degré.

Il est vrai qu'à côté des surfaces de ce genre viennent s'en placer d'autres, pour lesquelles la représentation est possible d'une seule manière. Par exemple, une surface d'ordre n, ayant un point multiple d'ordre $n-1$, peut être projetée sur un plan par des droites contenant le point multiple, et ce mode de représentation est en général le seul au moyen duquel la surface puisse être représentée sur le plan. De même pour la surface du cinquième ordre ayant deux droites doubles, qu'on projette sur un plan au moyen de droites rencontrant les deux droites doubles, etc.

Ainsi les surfaces représentées sur le plan se divisent en deux classes. Pour les premières, la représentation se fait d'une seule manière; et comme la représentation est unique, elle n'exige, pour être effectuée, aucune recherche préalable, ni la résolution d'aucune équation compliquée. Pour les autres, au contraire, qui sont les plus importantes, la représentation ne peut être effectuée qu'après une détermination préalable de certains éléments géométriques. Cette détermination s'effectue par la résolution d'une équation algébrique, et l'on peut dire que c'est l'étude de cette équation qui constitue la principale difficulté du problème de la représentation. D'ailleurs, quand cette équation est résolue, elle fournit un nombre déterminé de représentations équivalentes de la surface. C'est ainsi que, lorsqu'on connaît les 27 droites de la surface du troisième ordre, on peut en employer deux quelconques ne se coupant pas, ou employer des séries de coniques A, B, telles que deux coniques appartenant à deux séries différentes se coupent en un point unique, etc.

Toutes ces difficultés ne se présenteraient pas évidemment, si, tout en représentant une surface sur le plan, on n'exigeait pas qu'à un point du plan correspondît un seul point de la surface. Supposons, par exemple, qu'on projette tout point de la surface du troisième degré F_3 sur un plan P par des droites menées d'un point O. Alors, à tout point de F_3, correspond un seul point du plan P; mais la réciproque n'est pas vraie. A tout point du point M du plan P correspond une droite OP, qui coupe la surface en trois points M', M'', M''' correspondant tous les trois au même point M du plan P. Si l'on considère, par une image commode, le plan P comme composé de trois feuilles, le point M de ce plan pourra être considéré comme la réunion de trois points situés chacun dans une feuille, et qui correspondent respectivement aux trois points M′, M″, M‴ de la surface. On dit alors que la surface est représentée sur un plan triple, et cette représentation s'effectue sans difficulté et d'une infinité de manières, suivant la position choisie pour le point O. Remarquons que, si le point O se trouve sur la surface F_3, toute droite passant par O coupe la surface en deux nouveaux points, et celle-ci est alors représentée sur un plan double, c'est-à-dire qu'à un point du plan P ne correspondent que *deux* points de la surface.

Ce second mode de représentation sur un plan multiple a été, comme le premier, employé depuis longtemps pour les surfaces du second ordre. C'est surtout M. Chasles qui a étudié les propriétés auxquelles il donne lieu. Si nous ne nous trompons, les premiers travaux de M. Chasles sur cette question datent de 1828, et sont insérés dans le tome XIX, n^os 5 et 6, des *Annales de Gergonne*. Nous ne mentionnerons ici qu'une propriété très-simple : c'est que les sections planes de la surface se projettent suivant des coniques ayant un double contact avec la courbe de contour apparent de la surface, en sorte que toute conique ayant un double contact avec la conique de contour apparent sera la projection de deux sections planes de la surface. Si, comme nous l'avons dit plus plus haut, le plan est considéré comme composé de deux feuilles, ces deux feuilles viendront se réunir l'une à l'autre en tous les points de la courbe de contour apparent (car à ces points correspondent deux points confondus de la surface). Cette courbe et celles qui jouisssent de la même propriété dans toutes les représentations sur un plan multiple sont appelées, par M. Clebsch, *courbes de passage* (*Uebergangscurven*). Sans image, la courbe de passage est le lieu des points pour lesquels deux des points de la surface qui correspondent à un point du plan viennent se confondre.

Quelle est l'utilité de ce nouveau mode de représentation? Il est facile de répondre à cette question. Dans tout mode de représentation de cette nature, les sections planes se représentent par des courbes qui peuvent passer par des points fixes, ou avoir des points multiples en des points fixes, mais qu'*on achève de déterminer* par cette condition que *ces courbes représentatives doivent être tangentes à la courbe de passage en un certain nombre de points*. Or M. Clebsch a montré que tous les problèmes de cette nature se ramènent à la bissection des fonctions abéliennes. On voit donc que l'étude des équations algébriques déterminant les droites, coniques, sections planes particulières des surfaces applicables sur le plan est ramenée à l'étude des équations algébriques qu'on rencontre dans la bissection des fonctions abéliennes [1]. M. Clebsch, fidèle à sa méthode constante, a commencé par développer des cas particuliers, en ne considérant que la représentation sur un plan double, et des surfaces déjà presque toutes étudiées par lui. Mais il est facile d'embrasser dès à présent toute l'étendue du champ nouveau de recherches dans lequel nous introduisent ces travaux du géomètre allemand. Nous allons maintenant examiner en détail les deux Mémoires que M. Clebsch consacre à la représentation sur un plan double des surfaces qu'on peut déjà représenter sur un plan simple. G. D.

(*A suivre.*)