Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques

Revue bibliographique

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 193-200

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__193_0>

REVUE BIBLIOGRAPHIQUE.

TRAITÉ DE MÉCANIQUE RATIONNELLE, à l'usage des candidats à la licence et à l'agrégation; par H. LAURENT, lieutenant du Génie, répétiteur d'Analyse à l'École Polytechnique. — Paris, Gauthier-Villars; prix : 12 francs, 2 vol. in-8°, 1870.

Donnons d'abord une indication sommaire des Parties et des Chapitres; on pourra ainsi saisir parfaitement le plan de l'ouvrage et l'idée qui a dirigé son développement.

PREMIÈRE PARTIE. — *Cinématique.* — Mouvement d'un point matériel. — Étude du mouvement d'un corps solide. — Théorie des mouvements relatifs.

DEUXIÈME PARTIE. — *Statique.* — Statique du point matériel. — Théorie de l'équilibre. — Équilibre des corps solides. — Centres de gravité. — Mouvements d'inertie. — Équilibre des fils et des cordons. — Sur l'attraction.

TROISIÈME PARTIE. — *Dynamique du point matériel.* — Équations du mouvement. — Étude de quelques mouvement rectilignes. — Étude de quelques mouvements curvilignes. — Mouvement des points assujettis à rester sur des courbes ou des surfaces.

QUATRIÈME PARTIE. — *Dynamique générale.* — Principes généraux de la dynamique. — Équations canoniques du mouvement. — Mouvement des solides. — Hydrostatique et hydrodynamique. — Théorie des petits mouvements et de la stabilité de l'équilibre. — Application des principes de la mécanique rationnelle à la théorie des machines.

L'idée d'étudier les mouvements indépendamment des forces, émise par Carnot, il y a longtemps déjà, dans son *Essai sur les machines en général,* fut reprise par Ampère dans son *Essai sur la philosophie des sciences* (voir *Bulletin,* t. I^{er}, p. 297). Le mouvement peut s'étudier géométriquement, se mesurer; on arrive ainsi à un ensemble de propositions, n'empruntant rien à l'observation, qui constitue la *Cinématique;* il est donc très-rationnel de prendre la cinématique comme point d'appui de la statique et de la dynamique. Cette première étude faite, quelques principes généraux dont l'idée, sinon la démonstration complète, est empruntée à l'expérience, nous permettent de comparer et, par suite, de mesurer les causes de ces mouvements, causes dont l'essence, d'ailleurs, nous échappe complétement. On peut alors considérer les forces en elles-mêmes, en faisant abstraction des effets qui nous ont servi à les mesurer, et combiner ces forces entre elles; on aura la *Statique*.

Ces deux études faites, on a pu aborder ce problème général : Quel est le mouvement que produisent des forces données? Quelles sont les forces qui produisent un mouvement observé? La *Dynamique*, par une synthèse d'une admirable simplicité, a pu renfermer dans une seule formule la solution de cette double question; c'est à l'analyse, seule en jeu maintenant, qu'il appartient de la dégager.

Cet ordre d'idées, qui nous semble parfaitement logique, est celui que l'auteur du Traité que nous analysons a adopté; c'est là un premier titre, très-sérieux, par lequel se recommande son ouvrage; car, la plupart de nos traités de Mécanique rationnelle ont conservé l'ancien ordre d'idées, et il était indispensable d'en avoir un qui, tout en restant dans le programme des matières exigées pour la licence, se développât dans le sens que nous venons d'indiquer.

Mais ce n'est pas là le seul des mérites du nouveau Traité. M. Laurent a eu l'excellente idée de donner les équations canoniques du mouvement; et, sans entrer dans tous les détails que comporte cette théorie, il donne assez de développements pour faire bien connaître et apprécier les travaux de Lagrange, Hamilton, Jacobi, Bertrand, Bour, etc. Ce sont des questions qu'un licencié ne devait pas ignorer, et, cependant, il ne les rencontrait dans aucun des traités élémentaires de Mécanique rationnelle.

Si, abandonnant la vue d'ensemble, nous considérons les détails de l'ouvrage, nous devrons signaler particulièrement : la théorie de l'attraction, l'étude du mouvement elliptique, celle du mouvement de rotation d'un corps autour d'un point fixe, les applications faites à l'aide des formes canoniques, etc. Tout en se maintenant dans les limites du programme de licence, l'auteur a su donner à ces importantes questions plus d'étendue qu'on ne le fait habituellement.

La théorie de l'attraction, réduite avec raison à ses parties principales, est nettement discutée. Pour obtenir les formules de Jacobi, l'auteur suit la méthode de Dirichlet; cette méthode est simple et élégante; il nous semble, néanmoins, qu'on aurait pu y joindre le développement des calculs classiques qu'il est également bon de connaître.

Le mouvement elliptique est étudié aussi complétement que le demande un traité théorique élémentaire qui ne doit pas s'appesantir sur des questions spéciales.

La question du mouvement de rotation d'un corps solide autour d'un point fixe, qui a été l'objet d'un si grand nombre de travaux, où les transformations analytiques de Jacobi disputent d'élégance avec les méthodes géométriques de Poinsot, a été présentée avec soin. Sans pousser très-loin la discussion de cette question, l'auteur en dit assez pour la faire bien comprendre et faire naître le désir d'étudier plus à fond les travaux des illustres géomètres qu'on vient de citer.

La question des mouvements relatifs est, comme dans l'ouvrage de Coriolis, abordée par le calcul; nous trouvons que l'auteur a raison en cela; car cette marche est, quoi qu'on en dise, logique et lumineuse; nous pensons cependant qu'il aurait pu y joindre une démonstration géométrique. Systématiquement, M. Laurent demande à l'Analyse, aux méthodes générales, la solution des problèmes de la Mécanique, et nous adoptons parfaitement son opinion sur ce sujet; mais, comme on ne doit pas être exclusif, nous admettons des exceptions. Et, quoiqu'il ne faille pas abuser de la superposition des démonstrations qui, comme les démonstrations analytiques et les démonstrations géométriques, sont aussi distinctes par leur essence que par leur origine, la question des mouvements relatifs a une telle importance, qu'on pouvait se permettre, en sa faveur, une dérogation à la règle générale.

L'auteur a encore introduit dans son Traité, ce que nous serions tenté d'appeler des innovations : il a donné des exercices et cité assez souvent les mémoires originaux.

Les exercices qu'il propose sont bien choisis, mais le nombre en est trop restreint. En Mécanique, comme dans toutes les parties de la science quand il s'agit des éléments, on ne doit pas craindre de multiplier les exercices; les uns permettent de mettre en œuvre les méthodes générales, de se rendre compte, soit du mécanisme analytique, soit des propriétés dynamiques des forces, des réactions, des percussions, etc.; les autres font connaître des propositions, ou utiles ou intéressantes, qu'on ne peut pas développer dans un traité didactique, nécessairement limité.

Quant aux citations des mémoires originaux, l'auteur a encore été beaucoup trop sobre de détails; il y a toujours avantage, même pour celui qui commence l'étude d'une science, à être parfaitement renseigné sur les sources où il peut puiser et compléter les notions sommaires qu'on lui donne. Dans plusieurs circonstances, M. Laurent renvoie à d'autres traités pour y recueillir les indications relatives aux mémoires originaux; dans d'autres, les citations qu'il fait sont incomplètes. Or le lecteur ne peut qu'être reconnaissant des indications nombreuses qu'on lui fournit et qui lui évitent un travail pénible de recherches.

Une autre qualité de l'auteur, c'est de toujours insister sur la suite des idées, de toujours signaler ce qu'il y a d'incomplet dans certaines démonstrations, de préciser les restrictions qui se trouvent imposées. Sans adopter, d'une manière absolue, toutes les critiques qu'il fait, nous devons cependant reconnaître qu'il a souvent raison, et qu'il est toujours bon d'appeler l'attention du lecteur sur les points délicats que peut présenter soit une théorie, soit une démonstration.

Après cet aperçu sur les quantités d'ensemble, nous prierons l'auteur de vouloir bien nous permettre quelques observations sur les détails.

M. Laurent a souvent cherché la concision, soit dans les démonstrations, soit dans l'écriture des formules; il nous semble que l'excès contraire est préférable dans un traité qui s'adresse, d'après les intentions de l'auteur, à ceux qui commencent l'étude de la Mécanique. De plus, la discussion d'un certain nombre de questions n'est pas poussée, selon nous, aussi loin qu'elle devrait l'être.

Nous sommes obligés de dire qu'il reste dans l'ouvrage un assez grand nombre de fautes d'impression, et quelques-unes sont assez graves pour créer quelques embarras au lecteur novice; il est vrai qu'il est difficile d'échapper aux fautes d'impression, mais enfin il faut faire la part du feu aussi petite que possible.

Nous avons aussi remarqué, dans plusieurs problèmes, quelques inadvertances. Ainsi, pour le problème IV, t. I, p. 153, plusieurs facteurs numériques sont inexacts; mais la forme essentielle du résultat n'est pas atteinte.

Dans la recherche du centre de gravité du cylindre tronqué, t. I, p. 139, les constantes α, β, γ ne doivent plus avoir à la fin du calcul la même signification qu'au commencement, ce qui est un inconvénient assez grave, et l'auteur n'en avertit pas. Il est d'ailleurs facile de remédier au mal; il suffit de faire le choix d'axes convenables dès le commencement du calcul, et de définir alors, par rapport à ces nouveaux axes, le plan de troncature

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0;$$

le calcul, d'ailleurs fort simple, qui se trouve dans l'ouvrage, se développe alors sans modification aucune, et les résultats sont parfaitement exacts. L'auteur aurait pu faire remarquer que les coordonnées du centre de gravité vérifient l'équation

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - \frac{p}{2} = 0.$$

Dans un certain nombre de problèmes, l'auteur suppose la masse égale à l'unité; c'est là une simplification illusoire qui nous paraît présenter plus d'inconvénients que d'avantages.

Enfin, nous remarquerons, contrairement à l'assertion de M. Laurent, que l'intégrale $\int_0^t 2\mathrm{T}\,dt$ avait été désignée par Hamilton sous le nom de *fonction caractéristique*, et non sous celui de *fonction principale* (*Philosophical Transactions,* 1834, p. 252).

Parmi les nombreuses démonstrations que comporte une même proposition, M. Laurent a toujours eu le soin de choisir la plus simple, tout en se rapprochant autant que possible des méthodes directes. Cependant il nous semble que, dans certains cas, le choix pouvait être différent.

Ainsi, pour le théorème $(\alpha_i, \alpha_j) =$ const., la démonstration de Donkin (*Philosophical Transactions,* 1854) nous paraît préférable à à celle de Cauchy.

Quant à la résolution des équations (2^e vol., p. 118)

$$\frac{\xi_1^2}{a_1+\lambda_i} + \frac{\xi_2^2}{a_2+\lambda_i} + \ldots + \frac{\xi_n^2}{a_n+\lambda_i} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

il y a une méthode tout aussi directe que celle de Jacobi et beaucoup plus simple. Il suffit de remarquer que l'équation en λ

$$\frac{\xi_1^2}{a_1+\lambda}+\frac{\xi_2^2}{a_2+\lambda}+\ldots+\frac{\xi_n^2}{a_n+\lambda}=1$$

admet pour racines : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Si l'on pose alors $a_1+\lambda=\tau$, les racines de l'équation

$$\frac{\xi_1^2}{\tau}+\frac{\xi_2^2}{a_2-a_1+\tau}+\ldots+\frac{\xi_n^2}{a_n-a_1+\tau}=1$$

seront $a_1+\lambda_1$, $a_1+\lambda_2, \ldots, a_1+\lambda_n$; en prenant, dans cette équation, le produit des racines, on trouve, sans qu'il soit besoin d'effectuer aucun calcul,

$$\xi_1^2=\frac{(a_1+\lambda_1)(a_1+\lambda_2)\ldots(a_1+\lambda_n)}{(a_2-a_1)(a_3-a_1)\ldots(a_n-a_1)}.$$

Ce procédé est attribué, croyons-nous, à Chelini.

Nous n'insisterons pas davantage sur ces questions de détail. Si nous n'avons pas craint de formuler un certain nombre de critiques, qui ne portent d'ailleurs que sur des parties accessoires, c'est que nous avons considéré ce Traité comme un livre très-sérieusement fait. Le cadre en est bien dessiné; les idées sont amenées dans leur ordre logique; les démonstrations sont bien choisies, et l'auteur, tout en restant dans les limites étroites du programme de licence, a su placer son ouvrage à la hauteur des connaissances nouvelles. Ce Traité, qui doit devenir classique et qui se perfectionnnera certainement dans de nouvelles éditions, a le grand mérite de faire pénétrer dans l'enseignement élémentaire de la Mécanique des théories importantes, des méthodes fécondes qu'on ne saurait trop propager.

L. P.

BALTZER (R.). Theorie und Anwendung der Determinanten. Dritte verbesserte Auflage, Leipzig, Hirzel, 1870. — In-8°, 237 p. (1).

Un compte rendu détaillé de l'ouvrage de M. Baltzer serait parfaitement inutile, et nos lecteurs connaissent soit la traduction

---

(1) Baltzer (R.), *Théorie et applications des déterminants;* 3e édition, revue et augmentée.

française due à notre collaborateur M. Hoüel, soit les deux éditions originales publiées par l'auteur en Allemagne. La troisième, que nous avons sous les yeux, se distingue des précédentes par d'importantes additions. L'auteur a utilisé en particulier d'excellentes remarques qui lui ont été communiquées par MM. Borchardt, Kronecker, Weierstrass; plusieurs Chapitres de l'ouvrage ont été remaniés, surtout dans la partie consacrée aux applications. Nous signalerons, en particulier, un résumé des recherches de M. Borchardt sur les tétraèdres de volume maximum parmi ceux dont les faces ont des aires données. Lagrange, dans l'étude de cette question, avait été conduit à une équation du quatrième degré, qu'il n'a pas discutée complétement. M. Borchardt a, depuis, repris la question, en la généralisant, dans les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, et c'est un extrait de ses recherches que nous présente M. Baltzer. Le Chapitre sur les déterminants fonctionnels a été beaucoup augmenté; nous sommes étonné seulement que M. Baltzer n'ait pas mis à profit la lumineuse exposition de cette théorie qu'a donnée M. Bertrand dans le *Journal de Liouville*. La définition qu'adopte M. Bertrand a l'avantage de se rattacher aux propriétés les plus élémentaires des déterminants; elle fournit la démonstration immédiate intuitive de tous les théorèmes relatifs aux déterminants fonctionnels, et éclaircit beaucoup la théorie de la transformation des intégrales multiples. Ajoutons que M. Kronecker a fait paraître, dans le *Journal de Borchardt*, t. 72, p. 152, une Lettre à M. Baltzer, qui contient une foule de remarques intéressantes sur différents points de la théorie des déterminants. C'est là un témoignage mérité d'estime qui nous dispense de louer M. Baltzer. G. D.

GRAINDORGE. — Mémoire sur l'intégration des équations de la Mécanique; dissertation inaugurale présentée pour l'obtention du diplôme de docteur spécial en sciences physico-mathématiques. Bruxelles, 1871.

M. Graindorge s'est proposé, dans cette thèse, de résumer les travaux de Lagrange, Hamilton, Jacobi, Bertrand, Bour, etc., sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre. Parmi les démonstrations, souvent nombreuses, des théorèmes principaux qui se présentent dans cette théorie, l'auteur a su choisir les plus simples. Son Mémoire rendra donc service à ceux qui veulent aborder l'étude des mémoires originaux se rapportant à cette belle question. L. P.