G. DARBOUX

Sur la représentation des surfaces algébriques

Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques, tome 2 (1871), p. 155-158

<http://www.numdam.org/item?id=BSMA_1871__2__155_0>

MÉLANGES.

SUR LA REPRÉSENTATION DES SURFACES ALGÉBRIQUES.

La représentation d'une surface du quatrième ordre à conique double sur le plan peut être faite d'une manière simple, au moyen des propositions suivantes.

Théorème I. — Étant données cinq courbes du troisième ordre passant par cinq points, dont les équations sont

$$Q_i = 0, \quad i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,$$

il existe, entre les premiers membres de leurs équations, deux relations homogènes du second degré

$$(1) \qquad f(Q_i) = 0, \quad \varphi(Q_i) = 0;$$

si l'on ramène les deux identités précédentes, par une substitution linéaire, à ne contenir que les carrés des inconnues (ce qui revient à remplacer les courbes par d'autres cubiques satisfaisant aux mêmes conditions), les deux identités (1) prennent la forme

$$(2) \qquad \Sigma Q_i^2 = 0, \quad \Sigma a_i Q_i^2 = 0.$$

L'équation du cinquième degré qu'il faut résoudre, pour ramener les deux identités à une somme de carrés, est la même que celle dont dépendent les cinq points communs aux cinq cubiques.

Théorème II. — Étant donnée une conique dans l'espace, on peut toujours trouver, et d'une infinité de manières, cinq quadriques qui la contiennent,

$$(3) \qquad S_i = 0,$$

et telles qu'entre les premiers membres S_i on ait la relation identique

$$(4) \qquad \Sigma S_i^2 = 0.$$

Théorème III. — Si l'on pose

$$(5) \qquad S_i = Q_i \sqrt{a_i + \lambda},$$

les formules (5) donnent la représentation sur le plan de la surface générale du quatrième ordre, à conique double, définie par l'équation

$$(6) \qquad \sum \frac{S_i^2}{a_i + \lambda} = 0.$$

La courbe du troisième ordre, représentation sur le plan de la conique double, a pour équation

$$(7) \qquad \Sigma Q_i \sqrt{a_i + \lambda} = 0.$$

Les sections planes de la surface ont pour représentation plane les courbes dont l'équation est

$$\Sigma m_i Q_i \sqrt{a_i + \lambda} = 0, \quad \text{où} \quad \Sigma m_i = 0.$$

Les formules qui précèdent s'appliquent évidemment à la surface générale du troisième ordre, qui est un cas particulier de la surface du quatrième ordre à conique double. La méthode repose, on le voit, sur l'emploi de deux systèmes de coordonnées :

1° Dans le plan, un point peut être défini par les cinq quantités Q_i, reliées par les deux identités (2) ;

2° Dans l'espace, le point est défini par les cinq coordonnées S_i, reliées par l'unique identité (4).

Ces deux systèmes de coordonnées permettent, en tenant compte des identités, de traiter, sans faire intervenir les coordonnées ordinaires, toutes les questions qui se rapportent dans le plan à cinq points, dans l'espace à une conique et aux surfaces qui la contiennent. Aux exemples que j'ai donnés dans un travail antérieur, et dans une Communication à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. LXXIII, p. 732), on peut ajouter le suivant :

Étant donnée une surface du quatrième ordre, ayant pour ligne double le cercle de l'infini, ou *cyclide*, on sait intégrer l'équation différentielle des lignes pour lesquelles la sphère, passant par trois points consécutifs, et normale à la surface, est en même temps orthogonale à une des cinq sphères principales de la surface. Ces lignes sont analogues aux lignes géodésiques, et elles donnent le minimum d'une intégrale $\int \lambda^2 ds$, où λ est l'inverse de la tangente menée du point à une sphère.

La méthode précédente peut s'étendre et permet de traiter beaucoup de questions se rattachant aux transformations les plus variées; j'en citerai seulement trois exemples.

1° Étant données les quadriques passant par une droite et par deux points, on peut en choisir cinq,

$$T_i = 0,$$

telles qu'entre les premiers membres de leurs équations on ait la relation identique

$$\Sigma T_i^2 = 0; \tag{8}$$

si, comparant cette identité à l'identité (4), on pose

$$S_i = T_i, \tag{9}$$

on a une transformation des points de l'espace dans laquelle à un plan, correspondent toutes les quadriques passant par une droite et trois points. C'est la transformation de M. Cayley. Les mêmes considérations s'appliquent à la transformation du second ordre, récemment découverte par M. Cremona, et dans laquelle à un plan correspondent toutes les surfaces du second ordre passant par trois points et tangentes en un quatrième point à un plan donné.

2° Étant données les quadriques passant par quatre points, on peut en trouver six telles qu'entre les premiers membres U_i de leurs équations, on ait les deux identités

$$\Sigma_1^6 U_i^2 = 0, \quad \Sigma_1^6 a_i U_i^2 = 0.$$

Si l'on prend

$$x_i = U_i\sqrt{a_i + \lambda}, \quad i = 1, 2, \ldots, 6, \tag{10}$$

les formules (10), en y regardant les quantités x_i comme les six coordonnées d'une droite, donnent la représentation d'un complexe de droites du second ordre, ayant quatre points singuliers. Cette représentation est identique à celle qui a été effectuée par M. Lie (*Nouvelles* de la Société de Gœttingue).

3° Étant données les surfaces du troisième ordre, passant par une courbe du cinquième ordre $C_{5,2}$, on peut en choisir six, telles qu'entre les premiers membres V_i de leurs équations, on ait les deux relations identiques

$$\Sigma V_i^2 = 0, \quad \Sigma a_i V_i^2 = 0. \tag{11}$$

Si l'on prend, comme précédemment,

$$(12) \qquad x_i = V_i \sqrt{a_i + \lambda}, \quad i = 1, 2, \ldots, 6,$$

les formules (12), en y considérant les quantités x_i comm six coordonnées d'une droite, donnent la représentation, l'espace, du complexe le plus général du second ordre. Cette r sentation peut, d'ailleurs, s'effectuer directement, et l'on en d une notion complète des congruences et des surfaces appartenar complexe, ainsi que les propriétés de la surface de Kummer ([1])

Les systèmes des coordonnées précédents sont tels que les tions identiques sont toutes du second degré, et peuvent être r nées à la forme d'une somme de carrés. Il existe des méthod transformation dans lesquelles ces relations, tout en étant du se ordre, ne peuvent être débarrassées des rectangles, et d'autres lesquelles on doit faire intervenir des relations de degré supérie second. G. D.